UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

JULIANA MARIA SCHIVANI ALVES

DOS MÍNIMOS QUADRADOS À REGRESSÃO LINEAR: ATIVIDADES HISTÓRICAS SOBRE FUNÇÃO AFIM E ESTATÍSTICA USANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS.

NATAL – RN
2015

JULIANA MARIA SCHIVANI ALVES

DOS MÍNIMOS QUADRADOS À REGRESSÃO LINEAR: ATIVIDADES HISTÓRICAS SOBRE FUNÇÃO AFIM E ESTATÍSTICA USANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS.

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para defesa de dissertação como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: **Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa.**

NATAL – RN
2015

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Alves, Juliana Maria Schivani.
Dos mínimos quadrados à regressão linear: atividades históricas sobre função afim e estatística usando planilhas eletrônicas / Juliana Maria Schivani Alves. - Natal, 2015.
299 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

1. História da matemática – Dissertação. 2. Atividades históricas – Dissertação. 3. Ensino de estatística – Dissertação. 4. Informática para a educação básica. I. Sousa, Giselle Costa de. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 51(091)

JULIANA MARIA SCHIVANI ALVES

DOS MÍNIMOS QUADRADOS À REGRESSÃO LINEAR: ATIVIDADES HISTÓRICAS SOBRE FUNÇÃO AFIM E ESTATÍSTICA USANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS.

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para defesa de dissertação como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

Natal/RN, 18 de fevereiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

_____

Profª Drª Giselle Costa de Sousa

Orientadora

_____

Prof° Dr° Fernando Guedes Cury

Avaliador Interno

_____

Profª Drª Carmen Rosane Pinto Franzon

Avaliadora Externa

“O caminho entre a pureza original da matemática e sua aplicação é uma estrada não-pavimentada. Seguramente, no instante é que um indivíduo consegue transformar o seu conhecimento matemático (puro) em algo aplicável, ele estará educado matematicamente e a pavimentação terá começado.”

(HEIN, Nelson; BIEMBENGUT, Maria)

AGRADECIMENTOS

Que seja clichê, mas não posso deixar de agradecer em primeiro lugar a Deus, ao ser supremo que me permitiu ir mais longe do que eu imaginava conseguir.

Em segundo lugar, agradeço aos meus pais, Cidalva Janes Schivani Alves e José Demilton Alves, que, embora não tenham tido nenhuma formação escolar, sempre foram conscientes da importância dos estudos e nunca deixaram meu irmão e eu priorizar outra coisa que não fosse nossa formação. Bem me lembro das ameaças de *surras* que meu pai me fez quando me ouvia falar em desistir do Mestrado. Nunca me esqueço da vez que fui falar com o professor Emanuel Gomes Lourenço, do IFRN, responsável pela distribuição dos horários de aulas aos professores do campus, que precisava mudar meu horário da segunda e da terça, devido a minha aprovação no curso. Meu pai disse fervorosamente: *se ele não aceitar, você pede exoneração! Nem que a gente passe a comer feijão com arroz apenas, você vai fazer esse Mestrado!*

A propósito, não posso deixar de agradecer a Emanuel que sempre me livrou das aulas nas segundas e terças, permitindo-me cursar as disciplinas do programa, além de me fornecer uma turma do primeiro ano para poder aplicar o projeto quando o horário de todos os professores já estava definido.

Aproveitando o ensejo, agradeço ao primeiro ano vespertino do técnico integrado de Edificações, turma 2015.1, que aceitou a proposta de trabalho e superou minhas expectativas, me fazendo aprender e aperfeiçoar o produto educacional que gerou esta pesquisa.

Se minha orientadora, professora Giselle Costa de Sousa, não tivesse me escolhido, talvez eu não estivesse escrevendo essa folha de agradecimentos agora. Então, um obrigado muito especial a ela, por ter acreditado e confiado em mim, por toda a paciência e trabalho. É graças ao seu ritmo que estou conseguindo fazer o que muitos acharam quase impossível: defender a dissertação em um ano e seis meses. Muito obrigada mesmo!

Quando me vi com uma obra francesa datada em 1805, um anjo chamado Júlio Alves Hermínio, professor aposentado do IFRN e fluente na língua francesa, com toda a sua generosidade, classe e cultura, não só me ajudou na tradução da obra, como também me explicou os cálculos que nela continham.

Professor, entrei para a lista infinda de servidores e alunos do IFRN que te admiram e esperam ver um busto seu naquela cadeira, no canto da mesa da sala dos servidores, que o senhor sentava todas as manhãs, inspirando longas conversas políticas e por vezes filosóficas.

Outro anjo também apareceu para me salvar do desespero, Leonardo Rafael Medeiros. Também de forma muito generosa, reservou um espaço do tempo que não tinha para fazer as traduções das obras inglesas. Léo, você foi um dos que me ajudaram a continuar. Muito obrigada!

Falando em traduções, na parte complicada das obras espanholas, de aluno ausente passou a amigo presente, Otacílio Henrique da Silva Neto. Henrique, obrigada por não só traduzir, mas entender, me explicar e enlouquecer junto comigo de forma divertidamente responsável.

E falando naqueles que me ajudaram a continuar, não posso deixar de citar meu amigo José Damião Souza de Oliveira que, por horas de conversa via telefone, quase como um vidente, me preparou para todos os percalços com os quais eu iria me deparar. Contudo, mais que um amigo, você também foi meu exemplo de determinação.

Outro exemplo, porém mais antigo, é o meu irmão, professor Milton Thiago Schivani Alves. A ele eu agradeço todo o esforço, preocupação, apoio, ajuda, livros, conselhos e consolos. Você, meu irmão, é uma peça fundamental *nesse jogo* desde sempre.

E falando em peça fundamental, agradeço ao meu esposo, Berg Dantas, que mesmo antes de ser namorado, já me orientava e revisava minha escrita. Mais do que qualquer um, foi quem suportou minhas crises existenciais profissionais, minhas descrenças e compreendeu meus períodos de isolamento para me dedicar a escrita da dissertação. Mesmo quando distante, esteve sempre comigo. Como uma engrenagem, foi quem me impulsionou e movimentou do início ao fim do trabalho.

Sem ter passado pelas aulas de Estatística Descritiva do professor Francisco de Assis Medeiros da Silva, provavelmente esta dissertação teria tomado rumos diferentes. Agradeço a ele por todos os ensinamentos nesta área que me fizeram gostar tanto, que hoje dou aula de Estatística nos cursos técnicos e superiores do IFRN, elaboro projetos na área com os alunos do Ensino Médio e escolhi como tema de pesquisa da dissertação. Além de um excelente

professor, o senhor também demonstrou amizade me ajudando, sete anos depois, com a coleta bibliográfica para a produção deste trabalho.

Ainda resultado dos professores que conheci na Estatística, agradeço ao professor André Luís Santos de Pinho que, também de forma generosa, disponibilizou seu tempo para me apresentar as obras mais relevantes sobre História da Estatística, as quais eu poderia pesquisar. Não o bastante, também foi o primeiro a me explicar de forma bem detalhada tudo que sabia sobre os gráficos de Regressão Linear e não linear.

Agradeço, também, aos meus colegas de trabalho, as professoras Yane Santana, Marília Saraiva e Sonní Lemos, por toda experiência compartilhada desde a minha entrevista de seleção; a Nathalie Braga, Faisy Soares, Valéria Brito e Olívia Medeiros, por toda torcida e apoio; a Aline Chacon, por todos os ensinamentos e ao professor Giancarlo por destinar alguns minutos dos seus intervalos para compartilhar seu vasto conhecimento sobre a História os quais contribuíram de forma significativa para parte do referencial teórico deste trabalho.

Ao professor e amigo Marcelo Ricardo Santos da Silva, que com a simples frase *vai dar certo* me fazia acreditar até no inacreditável.

Aos amigos, Ana Cláudia da Silva, Myrna Raquel Agra de Souza, Alessandro Dionísio da Silva, Emerson Daniel (vulgo Pakito), aos irmãos Raphael e Israel Moreira, aos casais Ana Carla e Mozart, Ketson e Jeane, e Isaque Tertuliano, por acreditarem mais em mim do que eu mesma.

Aos professores Francisco de Assis Bandeira, Fernando Cury e Carmem Franzon, por aceitarem fazer parte da banca de defesa e me darem contribuições a fim de enriquecer meu trabalho.

Ao professor Isauro Beltrán Núñes, que embora tenha me levado ao auge do estresse e ocupado todos os meus fins de semana ao longo de um semestre, *fez a minha cabeça*, como diria minha orientadora, uma vez que me pus a refletir criticamente sobre minhas práticas docentes e nunca mais fui a mesma dentro e fora da sala de aula. Muito obrigada, professor, por nos fazer pensar tanto e em tanta coisa.

A todos vocês, minha eterna gratidão!

RESUMO

Esta pesquisa tem o objetivo de construir atividades pautadas na História da Matemática, executadas por meio da Investigação Matemática e das Tecnologias de Informação e Comunicação para abordar, de forma contextualizada, os conceitos de Função Afim e Estatística no Ensino Médio. Para tanto, fundamenta-se no contexto histórico de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), sua criação do Método dos Mínimos Quadrados (1805); Francis Galton (1822-1911) e seus experimentos que originaram a Regressão Linear (1875). A partir desta pesquisa bibliográfica, dos momentos históricos selecionados e dos resultados alcançados, este trabalho propõe e valida uma sequência de atividades para ser usada na primeira série do Ensino Médio. Esta sequência é composta de duas atividades históricas investigativas auxiliadas por um *software* de planilhas eletrônicas. A primeira atividade proposta recria, com os alunos, o experimento de Galton acerca do estudo comparativo das estaturas de pais e filhos. Os estudantes coletaram dados e os analisaram à medida que foram diferenciando função de relação, tipos de variáveis, coeficientes linear e angular, crescimento da função e, aprendendo alguns conceitos de Estatística básica, explorando o *software*. A segunda atividade objetiva aplicar os conceitos históricos abordados anteriormente para fazer um estudo comparativo das medidas corporais e de roupas, calçados e acessórios. Nesta última atividade, os alunos investigaram, em seus dados reais, situações de Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras, além de diferenciarem domínio de imagem, variáveis de coeficientes numéricos e fazerem estimativas das funções encontradas. O uso do recurso tecnológico provocou mais motivação em estudar os conceitos matemáticos abordados. Além disso, reduziu o tempo da construção dos gráficos, proporcionando mais espaço para os alunos investigarem as questões apresentadas. Aliado à História da Matemática, estimulou o interesse e criatividade dos alunos em realizarem as atividades investigativas propostas. Toda essa pesquisa qualitativa obteve como resultado o produto educacional constituído das atividades realizadas, com sugestões e dicas para o professor que deseje aplicá-lo em suas aulas.

PALAVRAS-CHAVE: Atividades Históricas; Ensino de Estatística; Ensino de Função Afim; História da Matemática; Informática para a Educação Básica.

ABSTRACT

This research aims to create guided activities in the History of Mathematics, carried out through Mathematical Investigation, and Information and Communications Technologies, to encompass and contextualize concepts of Affine Function and Statistics in High School. Therefore it is based on the historical context of Adrien-Marie Legendre (1752-1833) and his creation of the Method of Least Squares (1805); and Francis Galton (1822-1911) and his experiments that originated Linear Regression (1875). From this literature research, and from the selected historical moments and results achieved, this study proposes and validates a sequence of activities to be used for students of the first year of High School. This sequence is composed of two historical activities to be supported using an electronic spreadsheet software. The first proposed activity recreates, with the students, Galton's experiment about the comparative study of the stature of parents and children. The students collected data and analyzed them as they distinguished function from relation, types of variables, linear and angular coefficients and function growth, learning some Basic Statistics concepts while exploring the software. The second activity aims to apply the historical concepts discussed earlier to conduct a comparative study of the body, clothes, shoes and accessories measurements. In this activity, the students investigated, in their real data, situations of Injective, Surjective and Bijective Functions, distinguished domain from image, variables from numeric coefficients, and made estimates of the functions. The use of technology raised motivation to study the addressed mathematical concepts. Furthermore, it reduced the time to create graphs, promoting more space for the students to investigate the presented questions. Combined with the History of Mathematics, it stimulated the students' interest and creativity to perform the proposed investigative activities. All this qualitative research obtained, as a result, the educational product constituted of activities, with suggestions and tips for the teacher that might wish to apply it in class.

KEY-WORDS: Historical Activities; Statistics Education; Affine Function Teaching; History of Mathematics; Computing for Basic Education.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior
DCEM	Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio
DIAC	Diretoria Acadêmica de Ciências
DIACIN	Diretoria Acadêmica de Indústria
DIACON	Diretoria Acadêmica de Construção
DIAREN	Diretoria Acadêmica de Recursos Naturais
DIATINF	Diretoria Acadêmica de Tecnologia e Informática
ENEM	Exame Nacional para o Ensino Médio
HM	História da Matemática
IASE	*Internation Association for Statistical Education*
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IFRN	Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
IM	Investigação Matemática
MEC	Ministério da Educação e Cultura
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
OCDE	Organização para Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
OCN	Orientações Curriculares Nacionais
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PPECNM	Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
RL	Regressão Linear
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TRI	Teoria de Resposta ao Item
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Suposta fotografia de Adrien-Marie Legendre 40
Figura 2 – Caricatura de Adrien-Marie Legendre pelo pintor francês Leopold Boilly 41
Figura 3 – Fotografia do Colégio Mazarin, antigo colégio Quatro Estações, tirada em 2010, em Paris, na França. 42
Figura 4 – Capa do livro Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes 47
Figura 5 – As duas primeiras páginas do apêndice 49
Figura 6 – Exemplo de disposição de pontos obtidos em um experimento 50
Figura 7 – Imagem de Francis Galton aos 73 anos 55
Figura 8 – Foto da agenda de Galton com registros de digitais 56
Figura 9 – Registro da impressão da mão de Galton realizada pelo próprio 57
Figura 10 – Capa da primeira edição da revista Biometrika 59
Figura 11 – Cartaz do Laboratório Antropométrico de Galton 63
Figura 12 – Laboratório Antropométrico de Galton 65
Figura 13 – Cartão de registro do Laboratório Antropométrico 66
Figura 14 – Exemplos de correlação 67
Figura 15 – A experiência de medições de vagens de Galton 69
Figura 16 – Primeira linha de regressão construída por Galton ao observar o crescimento de sementes. A relação obtida foi do diâmetro das sementes dos ascendentes com o diâmetro das sementes descendentes. 69
Figura 17 – Linha de regressão construída por Galton ao observar a estatura de pais e filhos 70
Figura 18 – Dados de Galton das alturas de pais e filhos 72
Figura 19 – Laboratório de informática usado na aplicação das atividades 86
Figura 20 – Capa do caderno de atividades entregue para cada aluno participante do projeto 93
Figura 21 – Foto da parte externa e interna do caderno, contendo folhas de papel pautado e quadriculadas 93
Figura 22 – Alunos fazendo a pesquisa pelo *wi-fi* dos telefones móveis 97
Figura 23 – Resultado da pesquisa de um aluno sobre Eugenia 98

Figura 24 – Resultado da pesquisa de um aluno sobre a relação entre a Eugenia e a Matemática 98
Figura 25 – Resposta de um aluno à questão: *o que é Eugenia e quais são os seus objetivos* 99
Figura 26 – Resposta de um aluno à questão: *em que consiste a seleção natural de Charles Darwin e o que ela tem a ver com a Eugenia* 100
Figura 27 – Trecho da internet que o aluno transcreveu fielmente para responder à questão 2 da primeira atividade 100
Figura 28 – Definição de uma aluna sobre média e média aritmética 102
Figura 29 – Trecho da internet que exemplifica o termo *regressão à média* .. 103
Figura 30 – Definição de regressão à média de um aluno 104
Figura 31 – Resposta dos alunos no questionário pós-projeto acerca de estudar Matemática *sem* o uso da HM 105
Figura 32 – Junção dos dois gráficos exibidos na atividade 1 e pedidos na questão 10 para serem comparados 106
Figura 33 – Planilha dos dados coletados pelos alunos 109
Figura 34 – Alunos construindo, manualmente, gráficos de dispersão e ajustando os pontos a uma reta 110
Figura 35 – Construção do gráfico de dispersão e o ajuste dos pontos à reta 112
Figura 36 – Gráfico de dispersão ajustado de uma aluna e a estimativa da função 113
Figura 37 – Construção manual do gráfico e estimativa da função quando a reta passa pela origem 114
Figura 38 – Construção manual do gráfico e estimativa da função quando a reta passa pelo eixo positivo de *y* 115
Figura 39 – Respostas de três alunos acerca do termo independente da Função Afim poder ser nulo ou negativo 116
Figura 40 – Resposta quando o termo independente da Função Afim era negativo 117
Figura 41 – Estimativa da função construída pela aluna através de um sistema de duas equações lineares 118
Figura 42 – Ajuste dos pontos a uma reta crescente no gráfico de dispersão 121
Figura 43 – Gráfico de dispersão com ajuste linear construído no *Excel* 122

Figura 44 – Gráfico de dispersão ajustado no *Excel* em que a função exibida não condiz com a reta de ajuste 124
Figura 45 – Resposta da aluna *LG* para a questão 19 sobre a função estimada no Excel estar condizente com a reta de ajuste 126
Figura 46 – Gráfico construído no *Excel* e manualmente pela aluna *MY* 127
Figura 47 – Semelhança do gráfico manual com o do *Excel* 128
Figura 48 – Momento de coleta de dados das medidas dos alunos (Estudo Antropométrico) 132
Figura 49 – *Print screen* da tela com o resultado da pesquisa sobre padrões de medidas de roupas 134
Figura 50 – Tabela de medidas do busto de 15 alunos da turma e seus respectivos tamanhos de camisas 135
Figura 51 – Trechos do segundo relatório entregue de dois grupos distintos 137
Figura 52 – Aluno criando uma expressão que representa o intervalo de medidas dos bustos e das camisas 138
Figura 53 – Pergunta do item *c* da questão 2 da segunda atividade proposta139
Figura 54 – Resposta do aluno *LT* ao item *c* da questão 2 da segunda atividade 139
Figura 55 – Resposta de um dos grupos para o item *f* da segunda questão da atividade 2 141
Figura 56 – Respostas negativas de dois alunos para o item *g* na segunda questão da atividade 2 142
Figura 57 – Respostas positivas de quatro alunos para o item *g* na segunda questão da atividade 2 143
Figura 58 – Gráfico construído no *Excel* pelo grupo que escolheu relacionar medida do busto com o tamanho da camisa 145
Figura 59 – Parte do relatório do aluno *LA* referente à análise da atividade 1151
Figura 60 – Parte do relatório do aluno *LA* referente à conclusão da atividade 1 152
Figura 61 – Aluno *LT* comentando sobre o seu equívoco de denominar a reta da função de média 153
Figura 62 – Análises da aluna *PB* em seu relatório acerca da atividade 1..... 153
Figura 63 – Trechos de dois relatórios distintos, citando a dissociação da História com a Matemática 154

Figura 64 – Parte do segundo relatório de um dos grupos..... 154
Figura 65 – Introdução do segundo relatório de um dos grupos 155
Figura 66 – Parte do segundo relatório de um dos grupos..... 155
Figura 67 – Construção do gráfico da função *f(x) = 100 + 50m* pelo aluno *LM*, na avaliação final..... 158
Figura 68 – Questão 3 da avaliação final, após aplicação do projeto 159
Figura 69 – Resolução da aluna *RS* para a questão 3 da avaliação final 160
Figura 70 – Definição de Função Afim dada por dois discentes na avaliação final 161
Figura 71 – Resposta correta da aluna GV acerca do zero da função..... 162

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Quantidade de acertos de questões de Matemática por origem de escola 88
Gráfico 2 – Pontuação atingida em Matemática por origem de escola 89
Gráfico 3 – Respostas dos alunos quanto ao nível de aprendizado de Função Afim e de gráficos de Função Afim no Ensino Fundamental 90
Gráfico 4 – Opinião dos alunos (%) quanto ao uso da HM para o ensino de Matemática 91
Gráfico 5 – Opinião dos alunos (%) quanto a conhecerem a história de Francis Galton e como ele provou sua teoria usando Funções Afim e Estatística 92
Gráfico 6 – Grau de satisfação dos alunos ao utilizarem os sites de pesquisa, na internet, como auxílio de resposta para algumas questões da atividade 1 101
Gráfico 7 – Notas atribuídas pelos alunos para o estudo da história de Galton e o uso da história como metodologia 104
Gráfico 8 – Grau de satisfação dos alunos quanto ao uso do *software*; da HM sem o auxílio das TIC e da HM com o auxílio das TIC 129
Gráfico 9 – Opinião dos alunos quanto ao uso do recurso tecnológico para ensinar Matemática 145
Gráfico 10 – Nota atribuída a cada atividade realizada quanto a ser totalmente interessante (10) ou totalmente desinteressante (0) 148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Momentos na realização de uma investigação 38
Tabela 2 – Resultados fictícios de duas observações de dois fenômenos distintos 53
Tabela 3 – Cronograma da atividade 1 82
Tabela 4 – Cronograma da atividade 2 83
Tabela 5 – Quantidade de acertos de questões de Matemática por origem de escola 87
Tabela 6 – Pontuação atingida em Matemática por origem de escola 88
Tabela 7 – Desempenho dos alunos na avaliação final e individual 162

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
2 O ENSINO DE ESTATÍSTICA E FUNÇÃO SEGUNDO DOCUMENTOS OFICIAIS E INSTITUIÇÕES EDUCACIONAIS 26
3 ENSINO DE MATEMÁTICA VIA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO 30
4 ADRIEN-MARIE LEGENDRE E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS 40
4.1 ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) 40
4.2 O MÉTODO DOS MINÍMOS QUADRADOS 44
5 FRANCIS GALTON E A REGRESSÃO LINEAR 55
5.1 FRANSCIS GALTON (1822-1911) 55
5.2 A EUGENIA DE GALTON E A ORIGEM DA REGRESSÃO LINEAR 60
6 ATIVIDADES HISTÓRICAS BASEADAS NOS ESTUDOS DE GALTON E EXECUTADAS COM O APOIO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS 75
6.1 COMO ELABORAR UMA ATIVIDADE HISTÓRICA 75
6.2 O PRODUTO EDUCACIONAL PROPOSTO 79
7 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES: APRESENTAÇÃO, REFLEXÕES E ANÁLISES 85
7.1 O PÚBLICO E O ESPAÇO 85
7.2 A APLICAÇÃO 92
7.2.1 Dia 1 – 13 de junho (90 minutos – 2 aulas) 95
7.2.2 Dia 2 – 15 de julho (90 minutos – 2 aulas) 101
7.2.3 Dia 3 – 16 de julho (90 minutos – 2 aulas) 108
7.2.4 Dia 4 – 22 de julho (90 minutos – 2 aulas) 109
7.2.5 Dia 5 – 23 de julho (90 minutos – 2 aulas) 120
7.2.6 Dia 6 – 29 de julho (90 minutos – 2 aulas) 122
7.2.7 Dia 7 – 30 de julho (90 minutos – 2 aulas) 129
7.2.8 Dia 8 – 5 de agosto (90 minutos – 2 aulas) 131
7.2.9 Dia 9 – 6 de agosto (90 minutos – 2 aulas) 136
7.2.10 Dia 10 – 11 de agosto (90 minutos – 2 aulas) 144
7.2.11 Dia 11 – 13 de agosto (90 minutos – 2 aulas) 149

7.3 APRESENTAÇÃO E REFLEXÃO DE TRECHOS DOS RELATÓRIOS149
7.4 A AVALIAÇÃO FINAL: UMA ANÁLISE ESTATÍSTICA DO DESEMPENHO DOS ALUNOS 156
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 163
REFERÊNCIAS.....171
ANEXO A – EMENTA DO CURSO DE MATEMÁTICA DA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NO IFRN.....175
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PRÉ-PROJETO AOS ALUNOS.....178
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PÓS-PROJETO AOS ALUNOS.....182
APÊNDICE C – CRONOGRAMA DO 2° BIMESTRE DA TURMA.....187
APÊNDICE D – ATIVIDADE HISTÓRICA 1.....189
APÊNDICE E – ATIVIDADE HISTÓRICA 2.....227
APÊNDICE F – ATIVIDADE AVALIATIVA INDIVIDUAL FINAL.....249
APÊNDICE G – SLIDES DE SOCIALIZAÇÃO.....254
ANEXO H – CONCESSÃO DE DIREITOS AUTORAIS E DE IMAGENS.....298

1 INTRODUÇÃO

Frequentemente, a mídia e outras áreas do conhecimento usam formas gráficas para descrever fenômenos da sociedade que nos afetam direta e indiretamente. Interpretar e analisar criticamente esses fenômenos e, a partir dessas análises, se posicionar de forma consciente e tomar decisões é uma das formas de nos tornarmos cidadãos ativos na sociedade em que vivemos. Além disso:

> As aplicações da matemática estão amplamente presentes na sociedade e trazem implicações para a vida das pessoas. Seja nas diversas áreas científicas ou nas tarefas cotidianas, a matemática desempenha um papel subtil. (BARBOSA, 2003, p.4)

Neste sentido, a aprendizagem na área de Matemática implica na compreensão e na utilização dos conhecimentos adquiridos para não somente explicar o funcionamento do mundo, mas também usá-los para planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade (BRASIL, 2002). Embora sua compreensão e utilização sejam extremamente importantes, o ensino de Matemática na Educação Básica brasileira ainda não alcançou resultados satisfatórios.

Em abril de 2014, o jornal Estadão divulgou uma notícia em seu site informando que, segundo relatório da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), o Brasil ficou em 38° lugar entre 44 países avaliados quanto à capacidade dos alunos em resolver problemas de Matemática aplicados à vida real. Foi a primeira vez que esta pesquisa foi realizada pelo Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa). “Para a OCDE, a importância de medir as habilidades deve-se à crescente demanda do mercado por profissionais criativos” (VIEIRA, 2014, s/p).

Os documentos oficiais recomendam o ensino de Estatística com o principal objetivo de fazer com que os jovens estudantes possam usar os conhecimentos construídos para resolver problemas no seu dia a dia.

Além disso, a Estatística tem uma forte relação com as Funções Afim, outro conteúdo matemático de extrema importância e forte recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Porém, estes dois assuntos se encontram dissociados tanto nos livros didáticos quanto nas aulas de Matemática.

Saber diferenciar uma função de uma relação; compreender a Estatística como uma ferramenta para explicar fatos do cotidiano e relacioná-la às funções para fazer estimativas reais e resolver problemas são conhecimentos importantes para que o ser humano possa tomar decisões consciente e favoráveis a si próprio.

Diante do exposto, nosso *objetivo geral*, neste trabalho, é contextualizar e aplicar, de forma conjunta, noções de Estatística e conceitos de Função (em particular as Funções Afim), para serem aplicados no processo de ensino e aprendizagem a nível de Ensino Médio.

Para tanto, inicialmente, partimos para uma pesquisa documental. A partir de uma busca por referências de Estatística, encontramos nossa primeira fonte. Trata-se do livro *O andar do bêbado*, de Leonard Mlodinow. Na obra é narrada a história de muitos fatos estatísticos e de personagens a eles associados, como Francis Galton (1822-1911). Seus esforços para *melhorar a humanidade* nos chamaram a atenção e, assim, aprofundamos nossas pesquisas acerca de sua vida e obra.

Existem centenas de artigos de Galton em periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) divulgando o resultado de suas pesquisas e estudos, mas foram nos livros norte-americanos de História da Estatística que encontramos detalhes da sua criação: a Regressão Linear (RL)[1].

---

[1]Regressão linear é uma ferramenta Estatística que relaciona duas variáveis quantitativas de modo que uma variável pode ser estimada a partir (dependendo) do valor da outra, encontrando a função que melhor se ajusta a um conjunto de valores *(x, y)* dados. Ela leva o nome de linear pelo fato do conjunto de pontos *(x, y)* se ajustarem a uma Função Afim e gerar um gráfico em forma de linha reta. (NUÑEZ, 2011). Contudo, também existem regressões não lineares em que o gráfico se ajusta melhor a outro tipo de função. Mais detalhes podem ser vistos no capítulo 5.

Modelos de Regressão Linear são frequentemente ajustados usando a abordagem do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)[2]. Dessa forma, pesquisamos como e quem criou tal método. Assim, nos deparamos com Adrien Legendre (1752-1833) e sua obra francesa, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (Novos métodos para determinação das órbitas dos cometas). Datada de 1805, o apêndice traz a demonstração e aplicação de tal método por Legendre. Traduções e análises de trechos dessa obra foram parte dessa pesquisa e são comentadas nesta dissertação.

Veremos que o MMQ é um método de encontrar os parâmetros *a* e *b*, mais conhecidos como coeficientes linear e angular de uma Função Afim, usando derivadas parciais. As derivadas são conceitos matemáticos estudados em Cálculo de uma variável, disciplina de Ensino Superior. Uma vez que direcionamos nossa pesquisa a alunos da primeira série do Ensino Médio, substituímos o MMQ pelo ajuste automático realizado por um *software* de planilhas eletrônicas.

Assim, com posse das fontes de referência histórica sobre gráficos de regressão e o método de ajuste, surge a pergunta que norteia este trabalho:

Como abordar os conceitos de Função Afim e noções de Estatística com base na história da Regressão Linear usando um software de planilhas eletrônicas?

Na tentativa de responder nossa pergunta norteadora, partimos para a segunda parte da nossa pesquisa sob as perspectivas da pesquisa ação: a construção e aplicação de uma sequência de duas atividades históricas que geraram o *produto educacional*[3] desta dissertação.

---

[2]Método dos mínimos quadrados "[...] consiste em, conhecidos os valores de *f(x)* em *m* pontos, determinar uma função *g(x)* que melhor se aproxime de *f(x)*" (ARENALES; DAREZZO, 2014, p.157-158). Trata-se, portanto, de uma técnica Estatística que encontra o melhor ajuste para um conjunto de dados observados tentando minimizar os erros (ou desvios). Mais detalhes podem ser vistos no capítulo 4.

[3]De acordo com a CAPES, um produto educacional é algo "destacável do corpo da dissertação, pode ser a forma de um texto sobre uma sequência didática, um aplicativo computacional, um vídeo (na internet ou em CD/DVD), um equipamento, uma exposição; enfim, algo inidentificável e independente da dissertação." (PAVÃO, 2012, s/p). Tal produto pode ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores, uma vez que visam a implementação em condições reais de ensino. No nosso caso, elaboramos e aplicamos um caderno de atividades pautadas na História da Estatística executadas por meio do processo de Investigação Matemática e das Tecnologias de Informação e Comunicação, como será descrito no capítulo 4.

É importante deixar claro que entendemos como *atividades históricas* atividades que são pautadas na História da Matemática (HM). Isto é, a partir de momentos históricos da (re)criação de conceitos, teorias e fórmulas, o estudante pode acompanhar o processo de criação e desenvolvimento dos conteúdos à medida que aprende seus significados e aplicações (de modo similar ao percurso realizado pelo matemático ao longo da história). Aqui, usaremos a História da Estatística sem perda de sentido ou significado.

Nossa primeira atividade histórica elaborada recria um dos experimentos de Galton e aborda conceitos como: par ordenado, plano cartesiano, relação, função, gráficos de dispersão[4], média aritmética, porcentagem, dentre outros. A segunda atividade traz o experimento de Galton sendo utilizado nos dias atuais. A partir de um estudo comparativo e investigativo dos tamanhos de roupas e das medidas do corpo humano, os alunos coletaram e estudaram dados de seus colegas de turma a medida que estudaram funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, domínio e imagem de uma função, dentre outros conceitos.

Tais atividades foram aplicadas com alunos da primeira série do Ensino Médio técnico integrado em Edificações vespertino do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), campus Natal Central, no ano de 2015. A professora de Matemática desta turma também é a pesquisadora deste trabalho, o que nos remeteu fazer a segunda parte da pesquisa com enfoque na pesquisa-ação, que trata-se de um:

> processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa. Ou seja, a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões que são imediatamente utilizadas em sua própria transformação, gerando novas situações de investigação. (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.112-113)

Essas situações são mais propícias na pesquisa-ação pelo fato do pesquisador estar a todo tempo envolvido diretamente com o ambiente e com as

---

[4]Gráfico de dispersão é a representação de um conjunto de pontos (x_i, y_i) conhecidos no plano cartesiano. Permite visualizar o grau de associação e a relação funcional entre duas variáveis quantitativas. (BERTOLO, 2010).

pessoas observadas. Isso deixa os pesquisados à vontade para agir naturalmente, sem receios ou desconfianças, gerando conclusões mais verdadeiras para a pesquisa, visto que:

> Se as pessoas forem tratadas como ‘sujeitos de investigação’, comportar-se-ão como tal, o que é diferente do modo como normalmente se comportam. Como os investigadores qualitativos estão interessados no modo como as pessoas normalmente se comportam e pensam nos seus ambientes naturais, tentam agir de modo a que as atividades que ocorrem na sua presença não difiram significativamente daquilo que se passa na sua ausência. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.68)

Dessa forma, se faz mais vantajoso quando o observador é participante natural da sua pesquisa. Como consequência, o projeto é desenvolvido em uma sala de aula, em que já existe uma relação estabelecida entre os alunos e o professor pesquisador, como no caso deste trabalho.

Na segunda parte da pesquisa, utilizamos novos instrumentos metodológicos, a saber: fotografias, análise documental (construções e respostas escritas e virtuais dos alunos), diário de campo para observações de comportamento dos sujeitos e transcrições de falas dos mesmos (representadas no sétimo capítulo pelas iniciais de seus nomes).

Para obtermos resultados que respondessem à nossa pergunta inicial, trabalhamos também com a *análise do discurso* que, diferentemente da análise do conteúdo, investiga tudo que está inserido na pesquisa (o contexto social, econômico, político, a linguagem escrita, falada, gestual).

Por fazermos uso destes instrumentos e análises, seguimos os caminhos predominantes da pesquisa qualitativa, pois nela o pesquisador:

> *enriquece sua narrativa com trechos de entrevistas*, excertos de suas anotações, vinhetas, exemplos de trabalhos de alunos, entremeados de comentários interpretativos procurando persuadir o leitor, buscando *apresentar evidências que suportem sua interpretação* e, ao mesmo tempo, permitam ao leitor fazer julgamentos de modo a concordar ou não com as asserções interpretativas do pesquisador. (MOREIRA, 2003, p.24-25, grifo nosso)

Também aplicamos um questionário semiestruturado (com perguntas abertas e fechadas) antes e depois da realização das atividades. Optamos por este tipo de questionário por ser uma forma mais completa de registro de dados, uma vez que nas perguntas abertas:

> o objetivo do investigador é o de compreender, com bastante detalhe, o que é que professores, diretores e estudantes pensam e como é que desenvolveram os seus quadros de referência. [...] O carácter flexível deste tipo de abordagem permite aos sujeitos responderem de acordo com a sua perspectiva pessoal. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.17)

Já as perguntas fechadas, por serem “mais fáceis de serem respondidas, compiladas e tratadas estatisticamente” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.117), permitirão gerar dados quantitativos para a construção de tabelas, gráficos estatísticos e cálculos de medidas Estatísticas, de modo a facilitar nossas análises e conclusões da pesquisa. Embora estes dados não sejam apenas apresentados, mas também interpretados, por usarmos percentuais, tabelas e gráficos que reafirmam nossas interpretações, também trabalhamos nas vidas da pesquisa quantitativa.

Foram os resultados de todas as análises e interpretações da aplicação destas atividades que resultou no nosso produto educacional em formato de um caderno de atividades históricas. Buscamos que essas atividades conduzam os alunos à (re)criação de conceitos relacionados a gráficos de Regressão Linear auxiliados pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), particularmente as planilhas eletrônicas, por meio da Investigação Matemática (IM). Sabemos que para tanto:

> O professor deve propor situações que conduzam os alunos à (re)descoberta do conhecimento através do levantamento e da testagem de hipóteses acerca de alguns problemas investigados, através de explorações (investigações), pois nessa perspectiva metodológica espera-se que eles aprendam o ‘quê’ e o ‘porquê’ fazem/sabem desta ou daquela maneira, para que assim possam ser criativos, críticos, pensar com acerto, colher informações por si mesmos face a observação concreta e usar o conhecimento com eficiência na solução dos problemas do cotidiano. (FOSSA; MENDES; VALDÉS, 2006, p.102)

Nesse sentido, as atividades também trazem a aplicação do experimento histórico de Galton no estudo antropométrico (relação das medidas do corpo com os tamanhos de roupas, calçados e acessórios). Esta é uma problemática presente nos dias atuais, visto a necessidade de estabelecer um padrão confiável de medidas de roupas e não perder mais tempo precisando provar várias peças de mesma referência numérica, mas com tamanhos distintos.

Uma vez que “os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou um problema matemático” (BORBA, 2010, p.3), usamos um *software* de planilhas eletrônicas para a realização das duas atividades propostas. Trata-se de um programa em português que pode ser encontrado na versão livre e até on-line, permitindo mais facilidade na utilização. Além disso, possui ferramentas necessárias para a construção dos gráficos de dispersão e encontro da função representativa da Regressão Linear, conceitos bases de nossas atividades. Assim, o aluno tem oportunidade de formular suas conjecturas e realizar seus testes, inserindo diversos dados numéricos na planilha enquanto observa a transformação dos gráficos de dispersão e da função de regressão apresentada pelo *software* a cada vez que novos dados são inseridos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) veem esse tipo de atividade como uma investigação numérica e, acerca dela, afirmam que sua potencialidade é de proporcionar:

> o estabelecimento de conexões matemáticas. Muitas investigações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos bem como a utilização de conceitos geométricos para simplificar a recolha de dados e facilitar a compreensão de determinadas relações numéricas. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.65)

As atividades propostas visam, também, que o aluno possa realizar uma Investigação Estatística, pois:

> a Estatística constitui uma importante ferramenta para a realização de projetos e investigações em números e domínios, sendo usada no planejamento, na recolha e análise de dados e na realização de inferências para tomar decisões. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.91)

Desse modo, o trabalho com a HM (em particular, a estatística) alia-se às TIC para uma abordagem diferenciada no sentido investigativo das noções de Estatística e dos conceitos de Funções, no Ensino Médio, por meio dos estudos de Galton sobre Regressão Linear.

Em suma, trazemos neste trabalho uma proposta de atividade histórica para abordar, de forma contextualizada, os conceitos de Função Afim e noções de Estatística na primeira série do Ensino Médio.

Sendo assim, o *segundo capítulo* desta dissertação traz um panorama do ensino de Função Afim e Estatística na óptica de documentos oficiais como os PCN, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Curriculares Nacionais (OCN), bem como concepções de instituições educacionais como a *Internation Association for Statistical Education* (IASE). Comentamos acerca da formação atual dos professores de Matemática no que diz respeito aos conhecimentos sobre Estatística; como esse conteúdo se integrou aos currículos escolares da Educação Básica e as preocupações atuais de grupos de pesquisa em melhorar seu ensino.

Como já posto, objetivamos contextualizar a Função Afim e a Estatística por meio de atividades históricas investigativas, usando tecnologias. Tais atividades devem levar o aluno a um processo de investigação para não somente compreender os conceitos estudados, mas também saber aplicá-los na resolução de problemas. Nessa perspectiva, o *terceiro capítulo* desta dissertação traz discussões sobre o uso de HM e das TIC aliados a IM como ferramentas de ensino da Matemática. Traremos algumas das funções pedagógicas do uso de HM citadas por Miguel (1993); as etapas de uma IM descritas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e as vantagens e potencialidades das TIC segundo nossa própria experiência e também dos documentos oficiais, de Valente (1999) e outros autores.

Embora o MMQ não esteja inserido em nossas atividades históricas, ele explica como se dá o ajuste dos pontos dispersos a uma reta e como são determinados os coeficientes da função linear de ajuste. Quando o professor que aplica as atividades de RL tem esse conhecimento, ele é capaz de entender o porquê de, algumas vezes, o *software* traçar uma reta que não passa por nenhum dos pontos do gráfico de dispersão. Além disso, são raras as obras que

citam e/ou estudam Legendre e o seu método. Assim, no *quarto capítulo*, contamos um pouco da vida e da obra de Adrien-Marie Legendre.

Dando continuidade a nossa pesquisa histórica, o *quinto capítulo* trata da vida de Francis Galton e todos os percalços que o levaram à criação, estudo e desenvolvimento da *Eugenia*[5]. Como resultados de sua pesquisa, Galton chegou à Regressão Linear. Todos esses termos e momentos históricos são detalhados no capítulo 5.

A partir das fontes pesquisadas, construímos nossas atividades históricas, relatando todo o processo de construção no *sexto capítulo* do trabalho. Ainda neste capítulo também sugerimos etapas importantes a serem seguidas para a elaboração de uma atividade histórica de qualquer conceito com base na literatura de Mendes (2009); Miguel, et al (2009); Miguel (1993); Miguel e Miorim (2008); Fauvel e Maane (2002); Fossa, Mendes e Valdés (2006); Fossa (2011) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2013).

Como característica predominante da pesquisa qualitativa e alguns traços da pesquisa quantitativa, o leitor encontrará no *sétimo capítulo* a apresentação do espaço utilizado e a descrição do público participante de nossa pesquisa. Além disso, descrevemos detalhadamente as atividades propostas e os processos de execução dos alunos para resolvê-las. Trazemos ainda neste capítulo, trechos de diálogos entre os alunos e entre os alunos e o professor; fotografias das respostas das atividades; tabelas e gráficos com a apresentação e discussão de alguns resultados. Também contempla nossas reflexões (dos pesquisadores e pesquisados) e análises ao longo de todo o processo.

Por fim, o *oitavo capítulo* conclui nosso trabalho trazendo resultados importantes da pesquisa que permitiram alcançar os objetivos traçados.

---

[5]A palavra *Eugenia* foi cunhada pelo próprio Galton em 1833 a partir das palavras gregas eu (bom) e genos (nascimento). Uma vez que se acreditava que os filhos herdam as características físicas e mentais dos seus pais, a Eugenia estimulava a procriação por casais considerados de *boas* características.

2 O ENSINO DE ESTATÍSTICA E FUNÇÃO SEGUNDO DOCUMENTOS OFICIAIS E INSTITUIÇÕES EDUCACIONAIS

Buscando melhorar o ensino de matemática no mundo inteiro, grupos de pesquisas em ensino foram criados e currículos escolares estão em frequentes modificações.

Foi em 1970, na primeira conferência *Comprehensive School Mathematics Program,* que surgiu a proposta de inserir os conceitos estatísticos para serem estudados no Ensino Básico. Tal proposta fora justificada pelos motivos a seguir:

> - Relevância da probabilidade e da Estatística em quase todas as atividades da sociedade moderna;
> - Muitos estudantes, nas suas vidas futuras, usarão noções de probabilidade e Estatística como instrumentos em suas profissões e, quase todos, terão que argumentar baseados na probabilidade e no raciocínio estatístico;
> - A introdução da probabilidade e da Estatística no currículo de matemática produzirá um forte efeito estimulante por ser um ramo dinâmico da matemática e por já ficarem evidentes suas aplicações. (BAYER; et al, 2004, p.5-6)

De fato, a Estatística permite aplicar a Matemática em questões do mundo real, tais como: nas intenções de votos em período eleitoral; na eficácia de um novo medicamento ou em suas reações; nas preferências dos consumidores a certa marca de um determinado produto; nas expectativas de vida e fatores previdenciários; no estudo antropométrico para padronizar as medidas de roupas e calçados, como veremos em nossas atividades históricas. Além disso, os PCNEM consideram que a análise de dados é essencial em problemas sociais e econômicos afirmando que a Estatística “lida com dados e informações em conjuntos finitos e utiliza procedimentos que permite controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados” (BRASIL, 2002, 126).

Em algumas universidades do Brasil, o licenciando do curso de Matemática estuda em sua graduação apenas uma disciplina sobre Estatística. São os conhecimentos teóricos de um semestre que servirão como subsídios para as aulas destes assuntos, geralmente ministradas na terceira série do

Ensino Médio. Assim, todo o conteúdo é visto de forma puramente teórica. Não é objetivo desta disciplina com foco no Ensino Superior, fornecer propostas de ensino desses conteúdos na Educação Básica. De modo geral, é dada maior ênfase aos aspectos técnicos e operacionais do que aos problemas reais. Como consequência, “os professores às vezes têm alguma formação básica em probabilidade e Estatística, mas geralmente não têm formação nas questões relacionadas ao ensino desses conceitos” (MUNIZ; GONÇALVES, 2005, p.27).

Ter noções de Estatística vai além de saber a teoria. Calcular medidas como média, mediana e moda, construir tabelas e gráficos e coletar dados quantitativos não é suficiente para um estudante de Ensino Médio, é preciso saber interpretar estes dados e medidas. Por este motivo, grupos e associações foram criados na tentativa de promover o ensino de Estatística menos técnico e mais prático.

Foi em meados de 1990 que começaram a se intensificar os estudos referentes ao ensino e à aprendizagem da Estatística em todos os níveis de escolaridade. Atualmente, existe a *Internation Association for Statistical Education* (IASE), isto é, Associação Internacional de Educação Estatística. A associação promove conferências, realiza pesquisas e publica artigos direcionados à Educação Estatística e se preocupa com o modo que estes assuntos estão sendo tratados desde as séries iniciais até o Ensino Superior.

No Brasil, Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013) listam vários grupos com o mesmo enfoque. Dentre eles: o GT12, da SBEM, criado em 2001; o Grupo de Pesquisa em Educação Estatística (GPEE) na UNESP campus de Rio Claro, criado em 2004; o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Estatística (GEPEE) de responsabilidade da UNICSUL-SP desde 2009; o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e Ciências (GPEMEC) da UESC-BA; e a Associação Brasileira de Estatística (ABE) criada em 1984.

Esses grupos trabalham o ensino da Estatística focado no estudante, preparando-os para:

> Levantar problemas do seu interesse, formular questões, propor hipóteses, coletar os dados, escolher os métodos estatísticos apropriados, refletir, discutir e analisar criticamente os resultados considerando as limitações Estatísticas, sobretudo no

> que se refere à incerteza e variabilidade. (CAMPOS; WODEWOTZKI; JACOBINI, 2013, p.14)

Assim, não se trata do ensino de conceitos técnicos da Estatística, expondo gráficos de colunas e/ou setores à medida que se respondem perguntas acerca dos seus valores e representações. O ensino de Estatística deve ir muito mais além. Deve ser capaz de possibilitar ao aluno reflexões críticas sobre questões polêmicas do mundo real. Deve fazer com que o aluno tenha conhecimentos estatísticos e matemáticos, além do conhecimento do contexto do problema. Não somente isto, mas Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013, p.27) também enfatizam que “a avaliação crítica da informação depende de elementos adicionais, tais como a atitude de fazer questionamentos, não tratando passivamente as informações que lhe são disponibilizadas”.

Os PCNEM (BRASIL, 2002) orientam que os assuntos de Estatística sejam lecionados na primeira série do Ensino Médio, mesmo nível em que também se é ensinado os diversos tipos de funções. Nos livros didáticos não existe um padrão, podendo encontrar o capítulo sobre Estatística na primeira série, em alguns livros, e na terceira série, em outros. No instituto em que aplicamos as atividades, os alunos estudam Estatística na terceira série do Ensino Médio. A primeira série é destinada ao estudo de funções e outros conceitos conforme ementa da instituição (ver anexo A).

Embora sejam tratadas de forma dissociada, a Estatística tem uma forte ligação com as Funções Afim, principalmente no que se refere à construção dos gráficos de dispersão e o ajuste dos pontos a uma reta, gerando uma função linear. Se determinados assuntos matemáticos for trabalhados em conjunto, um pode servir de complemento e explicação para o outro. É o caso da Geometria plana com a Espacial; as Funções Quadráticas com as Cônicas; e as Funções Afim com noções de Estatística.

Além da ligação com a Estatística e a responsabilidade de ser a primeira função estudada que servirá de base para a compreensão das demais, as Funções Afim permitem ao aluno:

> expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática

> [...] A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. (BRASIL, 2002, p.121)

A aprendizagem das Funções Afim e da Estatística também pode ajudar àqueles que pretendem continuar seus estudos. Um levantamento que realizamos sobre os tipos de questões matemáticas cobradas no Exame Nacional para o Ensino Médio (ENEM) desde que se tornou uma prova para ingresso em diversas universidades brasileiras, em 2009, nos mostrou que mais de um quarto das questões de cada ano são constituídas de Função Afim e/ou assuntos estatísticos. O exame passou por uma reestruturação do Ministério da Educação e Cultura (MEC) que se apoiou em dois grandes propósitos:

> induzir referências para potencializar a reestruturação dos currículos no ensino médio, apostando na elevação da qualidade desse nível de ensino, e criar um processo unificado de seleção dos estudantes para a educação superior. (NÚÑEZ; RAMALHO, 2011, p.8)

Como consequência, as questões da prova também sofreram mudanças. Hoje servem como referência de problemas para muitos professores que desejam ir além do tradicionalismo e dos exercícios de fixação, uma vez que:

> O modelo de suas provas e as habilidades e competências a elas subjacentes superam a visão tradicional do conhecimento pelo conhecimento para situar o conhecimento num contexto real, problematizado, valorizando a relevância deste ao ser mobilizado como recurso do agir competente, atrelado a problemas básicos de cidadania. É um modelo de prova que leva o aluno a ler e compreender questões dentro de um contexto, a posicionar-se criticamente, a aprender a tomar decisões, dimensões que não têm sido, no geral, finalidades nem do ensino médio nem da educação básica. (NÚÑEZ; RAMALHO, 2011, p.8)

Vemos, portanto, a importância da aprendizagem desses dois conteúdos. Independente se o aluno irá ingressar numa faculdade ou optar por entrar no mercado de trabalho, saber definir e aplicar os conceitos de Função Afim e Estatística pode ajudá-lo a resolver problemas do mundo real.

Propomos, assim, abordá-los na perspectiva da HM e da IM auxiliadas pelas TIC, tal como explicaremos no capítulo a seguir.

3 O ENSINO DE MATEMÁTICA VIA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Reis (2006, p.163) traz a visão de Ricoeur (1913-2005) que define História como “meio pelo qual os homens tomam consciência de sua presença no tempo e estruturam sua experiência”. Acrescenta que “a história é uma construção do sujeito – ele reconstrói o passado, atribui-lhe sentido, sob influência de suas crenças, convicções, ideias e personalidade” (REIS, 2006, p.151).

As atividades propostas neste trabalho baseiam-se nas informações históricas coletadas de Galton e do seu experimento que originou a Regressão Linear. Galton se viu numa sociedade cheia de mazelas e possuía a convicção de que poderia *melhorar a humanidade* por meio do estímulo a procriação por casais pré-selecionados. Será que Galton tinha razão? Se (re)criarmos o experimento, concluiremos que os filhos herdam as características dos seus pais?

Quando a história é usada em atividades de ensino e de aprendizagem permite aos alunos levantarem hipóteses e interpretá-las, aguçando, assim, a sua intuição, o raciocínio-lógico, a capacidade de argumentação e a tomada de decisões. É nessa perspectiva crítica que elaboramos nossas atividades históricas. Em tais atividades, a História não é apenas contada. Ela é transformada de narração para descrição de processos e métodos, por vezes, árduos e criativos, de matemáticos que fizeram grandes descobertas e criaram expressões, fórmulas e desenvolveram conhecimento. Ações estas que mudaram a sociedade da época e são aplicadas e utilizadas até os dias atuais.

Na tese de Miguel (1993) as funções pedagógicas da História são citadas em oito itens, afirmando que uma utilização adequada da história poderia levar o estudante a perceber:

1) que a matemática é uma criação humana;
2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática;

> 3) as conexões existentes entre a matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e o mundo físico e matemática e Lógica;
> 4) que necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas;
> 5) que a curiosidade estritamente intelectual, isto é, que aquele tipo de conhecimento que se produz tendo como base a questão 'O que aconteceria se...?', pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias;
> 6) que as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;
> 7) a natureza e o papel desempenhado pela abstração e generalização na história do pensamento matemático;
> 8) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL, 1993, p.76)

Realmente, podemos perceber alguns destes itens nos trechos históricos sobre RL selecionados para criação das atividades propostas. Os percalços que Francis Galton passou até criar o termo *regressão* e provar sua teoria que hoje não é bem vista pela sociedade, retomam os itens 5 e 6. Seus estudos estavam diretamente ligados à Biologia e Antropologia o que faz com que a Matemática não seja tratada de forma isolada.

O MMQ, por sua vez, teve sua criação impulsionada por um problema dos astrônomos da época em determinar as órbitas do planeta, remetendo-nos ao quarto item de Miguel. Hoje, o método é utilizado em diversos ramos da ciência, desde as exatas até as ciências humanas, para explicar comportamentos de gráficos estatísticos.

Além disso, utilizamos a história para um ensino de matemática mais contextualizado, uma vez que:

> A Matemática, da forma que comumente vem sendo apresentada, quer em aulas, quer em livros-texto, traz subjacente a ideia do *edifício pronto, da obra acabada,* onde a busca das soluções das questões não é vivida *com* o aluno, encobrindo sob o peso de uma aparente clareza da exposição lógica e organizada dos seus termos, o *fazer* Matemática; encobrindo, em uma *didática da facilitância*, a verdadeira complexidade da formação histórica desse conhecimento. (MEDEIROS, 2005, p.19, grifo do autor)

Quando apresentamos a Matemática como uma ciência pronta e acabada, é comum o estudante questionar o contexto de tal conteúdo ou, ainda, o porquê de estarem estudando estes conceitos. Caso sua curiosidade não seja satisfeita, na visão do discente, aquele tema não terá nenhuma aplicabilidade na sua vida real e ele dificilmente terá algum prazer em estudar e aprender estes assuntos. Segundo Miguel; et al (2009), a História, quando incorporada às atividades de ensino, é uma grande aliada na explicação desses porquês. Assim:

> Quando utilizamos a história associada ao aspecto cotidiano da matemática, buscando conduzir o aluno à matemática escolar até mostrar-lhe o caráter científico desse conhecimento, conseguimos desenvolver uma abordagem de ensino que relaciona o construtivismo com a história da matemática. (MIGUEL; et al, 2009, p.112)

Além disso, a HM pode também ser um *antídoto contra o esquecimento*, de acordo com Fossa (2011). O autor explica que a HM apresenta a Matemática como um produto cultural do homem e traz as influências mútuas deste ser com os vários aspectos da vida, evitando o esquecimento e a alienação. Nesta direção, Medeiros (2005) discorda com a forma como a Matemática é normalmente ensinada. O autor afirma que apresentar a matemática formalmente, repleta de símbolos e rigor, destituída de sua história, é uma ação precoce, imposta e que “queimam etapas necessárias na estruturação do pensamento do aluno” (MEDEIROS, 2005, p.19-20). Não estamos querendo, aqui, desvalorizar as notações matemáticas, os simbolismos e expressões que representam e traduzem as ideias para um rigor matemático. Reconhecemos sua importância e necessidade para os cálculos. Contudo, defendemos que esta etapa do aprendizado matemático não seja o primeiro contato do aluno, mas que antes disso ele possa compreender os sentidos e significados de cada conceito estudado e garanta um maior estímulo para os estudos. O recurso pedagógico que atende essa finalidade é a HM, por:

> promover um ensino aprendizagem da matemática que permita uma ressignificação do conhecimento matemático produzida pela sociedade ao longo dos tempos. Com essa prática, acreditamos ser possível imprimir maior motivação e criatividade

> cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente [...]. (FOSSA; MENDES; VALDÉS, 2006, p.84)

Os PCN também sugerem a inserção da HM no ensino de modo a:

> Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. (BRASIL, 2002, p.117)

Mas, se por um lado a HM tem o "papel de um elemento esclarecedor do sentido das teorias e dos conceitos matemáticos que deverão ser estudados" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p.46), por outro, há também os que apontam restrições para tal uso. Fauvel e Maanem (2002) listam esses contra-argumentos que vão desde a ausência de tempo na sala de aula, de referenciais teóricos, de capacitação docente, até mesmo a inexistência de uma forma de avaliação da aprendizagem do aluno. Fossa, Mendes e Valdés, (2006) citam o problema da falta de informações históricas. Eles afirmam que os professores tendem a ter dificuldades em usar a HM na sala de aula porque a HM é feita pelos historiadores que tem como objetivo apenas contar a história. Não há uma preocupação com os aspectos pedagógicos. Contudo, segundo Miguel e Miorim (2008), a ausência de literatura adequada deveria ser visto como um estímulo à continuidade das investigações históricas e um apelo à necessidade de constituição de mais núcleos de pesquisa nessa área.

Os autores também refutam o argumento de que a HM demanda tempo e esforço na sala de aula. Eles afirmam que "o que se perde em tempo e energia, ganha-se em significado, sentido e criatividade" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p.64). No nosso caso, confiamos que a *perda* de tempo pode ser potencializada pelas TIC e pela IM para manter o *ganho* de significado.

As TIC desempenham um papel fundamental na HM, isso porque:

> [...] calculadoras programáveis modernas permitem que os estudantes de hoje refaçam os cálculos de antigamente, muitas vezes, para maior precisão e muito mais para o cálculo. Capturando em poucos segundos um cálculo que pode ter levado dezesseis séculos, dias ou meses dos astrônomos, os

> alunos não vão indiscutivelmente recapturar a experiência antiga, mas gerar uma nova. Em alguns casos, os estudantes de hoje podem ser capazes de encontrar coisas nas imagens que os seus antecessores não puderam[6]. (FAUVEL; MAANEN, 2002, p.354, tradução nossa)

Dessa forma, as TIC reduzem o tempo gasto na realização de uma atividade e fazem com que os alunos fiquem mais à vontade para refletir sobre o que é mostrado no *software*. Algumas vezes, a máquina pode exibir algo novo aos olhos do estudante ou algo que não condiz com os resultados esperados. Ter essa visão crítica, levantar hipóteses sobre o problema surgido e testar possíveis soluções são atitudes típicas de um processo investigativo que gera o aprendizado.

Vale salientar que não estamos negando o processo manual, de construções com lápis e papel. Contudo, nosso objetivo aqui é fazer os alunos pensarem, refletirem, investigarem. Nesse sentido, as TIC ganham espaço, uma vez que:

> colocam desafios irrecusáveis à atividade educativa dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático e estender o alcance e a profundidade das aplicações desta ciência. Trata-se de poderosas ferramentas intelectuais, que *permitem automatizar os processos de rotina e concentrar a nossa atenção no pensamento criativo*. Mas estas tecnologias não ensinam por si só. Ao professor, cabe um papel decisivo na organização das situações de aprendizagem. (PONTE, 1995, p.2, grifo nosso)

Obviamente, ao trabalhar com a tecnologia na sala de aula, os professores devem tomar cuidado com a forma em que esse trabalho é conduzido, para que o aluno não seja um mero receptor de informações transmitidas pelo computador, visto que “o papel do computador é o de provocar mudanças pedagógicas profundas, ao invés de ‘automatizar’ o ensino ou

---

[6]modem programmable calculators enable today’s students to redo calculations of former times, often to greater accuracy and far further into the calculation. In capturing in a few seconds a calculation which may have taken a sixteenth century astronomer days or months, students are arguably not recapturing the experience of old but generating a fresh one. In some cases today’s students may be able to find things in the figures which their predecessors could not. (FAUVEL; MAANEN, 2002, p.354)

preparar o aluno para ser capaz de trabalhar com a informática" (VALENTE, 1999, p.8). Nessa pesquisa, isso é levado em consideração. Propomos que os estudantes construam gráficos manuais e os refaçam em um *software* de planilhas eletrônicas. Por meio da IM, os discentes devem comparar e argumentar sobre as semelhanças e diferenças identificadas entre as duas construções. Não somente isso, os alunos também são levados a desconfiar (quando necessário) das informações fornecidas pelo *software* e, assim, refletir criticamente sobre o trabalho realizado. Deste modo, espera-se desmistificar o uso das TIC como máquina de pensar, mas sim máquina usada como apoio para levar a pensar, ou seja, não se trata de uma muleta do pensamento, mas apoio para estimulá-lo.

De acordo com os PCNEM:

> As calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os *softwares*. (BRASIL, 2002, p.127)

Justamente pelo uso do *software* é que foi possível trabalhar com as alturas de pais e filhos. As atividades propostas envolviam duas casas decimais, sem dificuldades, mesmo que 34% dos alunos tenham afirmado nunca ter usado o programa e mais 17% terem usado apenas uma vez, totalizando 51% de estudantes da turma que não possuíam familiarização com o recurso tecnológico apresentado. Nesse sentido, buscamos também que por meio das TIC os alunos possam:

> compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias, associá-las aos problemas que se propõe solucionar e resolver os problemas de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos a situações reais ou simuladas. (BRASIL, 2002, p.21)

Indo mais além, as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (DCEM) também afirmam que "o desenvolvimento da tecnologia visa à satisfação de necessidades que a humanidade se coloca, o que nos leva a perceber que a tecnologia é uma extensão das capacidades humanas" (BRASIL, 2012, p.18).

Isso nos remete ao pensamento de Pierre Lévy (1993 apud BORBA; PENTEADO, 2007) sobre a relação do ser humano e a informática, como sendo a informática uma *nova extensão de memória humana*. Realmente, na perspectiva de Lévy, a história da humanidade está impregnada pela história das mídias e vice-versa. Logo, propostas atuais como a desta pesquisa são recomendadas associando a um *passado* atual e próximo a realidade e necessidades dos alunos. É nessa linha de pensamento e objetivos que elaboramos atividades pautadas na história, mas que podem ser resolvidas por meio das TIC. Usamos a internet, como sites de buscas que permitem respostas rápidas sobre um determinado significado e/ou conceito; e os *softwares* de planilhas eletrônicas, capazes de construir gráficos e estimar funções em poucos segundos, bastando apenas que o usuário monte a tabela com os dados das suas variáveis envolvidas e clique na opção desejada.

De fato, não somente pelo seu dinamismo, mas também por "permitir o tratamento de dados reais, em vez de trabalhar apenas com dados de pequena dimensão" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.106), as TIC têm exercido grande influência no ensino de Matemática. Aqui, usaremos o *software*, no primeiro momento, para o tratamento da relação de medidas entre pais e filhos, tais como estatura, massa corporal e tempo de resposta de uma questão de raciocínio lógico. No segundo momento, o mesmo *software* será usado para a solução de um problema atual que é o estudo antropométrico, isto é, o estabelecimento de um padrão para o cálculo de medidas de roupas, calçados e acessórios de modo a melhor se adequar ao corpo humano.

Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013) são autores que defendem o uso das tecnologias no ensino de Estatística. Eles afirmam que o cálculo pode ser feito pela máquina, permitindo grandes possibilidades de simulações e utilização dos números reais e decimais, mas que quem irá fazer a análise desses dados e interpretá-los não é o computador, mas sim o usuário que tomará decisões sendo apenas auxiliado pela tecnologia.

Mas, para os que ainda criticam ou recusam o uso da informática na educação, Machado Junior, Soares e Gonçalves (2008, p.73) afirmam que "a relação entre a informática e a educação matemática não deve ser pensada da forma dicotômica, se é bom ou ruim para a aprendizagem, mas sim como transformação da própria prática educativa".

Educadores podem pensar que, se o aluno digita em um determinado *software* uma função e o gráfico correspondente aparece imediatamente na tela, ele não terá como aprender a construi-lo. Claro que é preciso que o professor oriente bem as atividades propostas para que a aula não acabe se transformando em um processo mecanizado. Porém, sabemos que neste exemplo depende dos objetivos almejados. O fim pode não ser a construção do gráfico, por exemplo, mas a exploração das propriedades e conceitos envolvidos.

Em suma, Ponte (1995) lista cinco itens como vantagens trazidas ao ensino e a aprendizagem da Matemática com o auxílio das tecnologias, resumindo tudo que afirmamos até aqui. São elas:

> - uma relativização da importância das competências do cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas agora muito mais rápida e eficientemente;
> - um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas;
> - uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;
> - um crescimento de interesse pela realização de projetos e atividades de modelação, investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência matemática;
> - uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em atividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza. (PONTE, 1995, p.2)

Trabalhar com tecnologias no ensino de Matemática necessariamente leva ao discente trabalhar com a Investigação Matemática. Isso porque não é apenas o resultado de um cálculo ou a construção exibida pela máquina que irá promover a aprendizagem. São todas as análises, interpretações e investigação que o aluno fará daquele cálculo ou construção que o levará a compreender o significado de cada conceito e aplicá-lo para a solução dos problemas que se almeja resolver. Braumann (2002) melhor explica esse processo fazendo uma analogia com o aprender a andar de bicicleta. Se alguém quiser aprender a andar de bicicleta apenas vendo os outros andar e ouvindo as orientações, ele dificilmente irá conseguir aprender. É preciso andar na bicicleta, errar e aprender

com os erros. Ainda segundo este autor, “aprender Matemática passa necessariamente por uma faceta investigativa, que só se pode apreender fazendo investigação matemática” (BRAUMANN, 2002, p.21). Nesse sentido, Fossa, Mendes e Valdés (2006, p.90) acreditam que a experiência da HM “pode ser ampliada para desenvolver, nos estudantes, habilidades de pesquisa, tais como a elaboração e o uso de atividades investigatórias, aumentando seu interesse pela matemática”.

Assim, unimos a HM e as TIC ao processo de IM apontada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p.17) como uma forma de não apenas resolver problemas, mas também de fazer criações “que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original”.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), a realização de uma IM é constituída por momentos os quais incluem diversas atividades, representadas no quadro (tabela 1) a seguir e que iremos tomar como base na elaboração das atividades que este trabalho destina.

Tabela 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificativa e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar uma conjectura ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte, Brocado e Oliveira (2013, p.21).

No caso desta pesquisa, o reconhecimento da situação-problemática se dará por meio das leituras históricas sobre os tópicos estatísticos que dizem respeito a Francis Galton e como ele criou a Eugenia. Será que sua teoria de que os filhos herdam as características físicas e mentais estava mesmo correta e perdura até os dias atuais? A partir desta questão, os alunos serão levados a

(re)criar o experimento de Galton, coletando informações suas e dos seus pais (ou parentes), acerca da altura, massa e tempo de resposta de um jogo de raciocínio lógico. Os dados de todos os alunos da turma serão reunidos e analisados, com construções gráficas e estimativas das funções que os representam, bem como seu comportamento (crescente ou decrescente). Após um estudo investigativo espera-se que os alunos sejam capazes de chegar as suas próprias conclusões e resultados, respondendo, assim, a questão inicial proposta.

Não enxergamos outra possibilidade de usar a HM sem o auxílio da IM, pois como Fossa, Mendes e Valdés (2006, p.100) enfatizam, “o princípio que articula as atividades de ensino-aprendizagem via História da Matemática é a investigação, constituindo-se no sustentáculo da proposta”. Assim, será este processo investigativo que permitirá os alunos a aprenderem (ou contextualizarem) os conceitos matemáticos propostos.

Apoiados, portanto, por essas teorias, as atividades propostas no produto educacional deste trabalho versarão sobre o uso da HM e das TIC apoiadas na perspectiva da IM. Isto porque acreditamos que tais tendências se completam em prol do ensino de Matemática. E por assim dizermos, segue o quarto capítulo desta dissertação dando continuidade a nossa pesquisa histórica, apresentando a vida e a obra de Legendre e como essas informações se encaixam no experimento de Francis Galton, tema de nossa atividade histórica.

4 ADRIEN-MARIE LEGENDRE E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Embora Legendre tenha contribuído para a Matemática, Física e Estatística, pouco se sabe sobre sua vida. Dentre os raros documentos disponíveis para este fim, encontramos a tese de Silva (2010) que esteve na França coletando dados sobre o matemático e suas obras. Esta será nossa principal fonte de referência.

4.1 ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

Adrien-Marie Legendre nasceu no dia 18 de setembro de 1752, na cidade de Paris. Como o sobrenome Legendre é muito comum na França, até 2009, livros e pinturas mostraram um retrato que se assemelha muito ao do político francês Louis Legendre (1752-1797) como sendo o do matemático Adrien-Marie Legendre.

Figura 1 – Suposta fotografia de Adrien-Marie Legendre

Fonte: Stigler (1986, p.11).

A imagem do matemático, então, foi considerada falsa. Contudo, segundo Silva (2010) a identificação é um novo equívoco, pois não há provas suficientemente claras do erro. A autora conclui que a foto considerada do político é, de fato, a do matemático Legendre, uma vez que:

> ele é o retrato que se encontra na Biblioteca Nacional de Paris e aparece em todas suas biografias [...]. Em consequência, por causa dessas infundadas justificativas, nessa mesma ocasião, o retrato foi retirado da biografia de Adrien-Marie Legendre da página francesa do wikipedia. Por outro lado, vale ressaltar que, contrariamente a Lagrange e Gauss, não encontramos nenhum outro retrato de Legendre numa idade mais avançada, porém existe uma aquarela em que Legendre e Fourrier foram retratados juntos [...]. (SILVA, 2010, p.68)

Tal aquarela é a única imagem do matemático e pode ser encontrada no livro de caricaturas de 73 matemáticos famosos intitulado de *Album de 73 portraits-charge aquarellés des membres de l'Institut (Albúm de 73 caricaturas em aquarela de membros da academia)*, de 1820. Na figura 2 a seguir, vemos parte de uma dessas caricaturas, direcionadas ao Legendre.

Figura 2 – Caricatura de Adrien-Marie Legendre pelo pintor francês Leopold Boilly

Fonte: Connor e Robertson (1999, s/p).

A família de Legendre não pertencia à nobreza, mas era considerada uma família de posses. Parte dessa riqueza foi destinada à educação do matemático que começou a se interessar por ciência quando iniciou seus estudos no Colégio Mazarin. A instituição funcionava no antigo colégio das Quatro Nações, uma das escolas mais avançadas do século XVII.

Foi neste mesmo colégio que, aos 18 anos, Legendre concluiu seus estudos e defendeu uma tese em Matemática e Física. Aos 22 anos, o jovem

cientista publicou um tratado de Mecânica com a ajuda dos seus professores. Na figura 3 a seguir, é possível ver uma foto do colégio francês, em 2010.

Figura 3 – Fotografia do Colégio Mazarin, antigo colégio Quatro Estações, tirada em 2010, em Paris, na França.

Fonte: Chemello (2010).

Quando completou 23 anos, Legendre se tornou professor da Escola Militar de Paris, onde ficou até 1780.

Os monarcas dessa época “eram perfeitamente conscientes que as ciências e a Matemática eram potencialmente uma alavanca para o desenvolvimento da capacidade militar e industrial de seus reinos” (SILVA, 2010, p.24), assim, Legendre pode trabalhar de forma favorável ao desenvolvimento acadêmico.

Em 1782, Legendre recebeu o Grande Prêmio da Academia de Ciências de Berlim pelo seu trabalho *Trajetórias de projéteis em meios resistentes*. Tratava-se de cálculos para determinar a curva descrita por balas de canhão e bombas. A quantia recebida pelo prêmio o tornou independente financeiramente e lhe possibilitou uma dedicação exclusiva às pesquisas.

No ano seguinte, ele se tornou membro adjunto (colaborador) da Academia de Ciências de Paris. Posteriormente, foi promovido a membro associado da classe de Mecânica e eleito membro da Sociedade Real de Londres.

De caráter generoso, Legendre manteve financeiramente vários estudantes necessitados, pagando-lhes uma constante pensão.

No período da Revolução Francesa (1789-1799), a Academia de Ciências foi fechada. O novo governo entendia como “a representação de um patrimônio elitista, um instrumento de poder e uma autoridade de censura do Antigo Regime” (SILVA, 2010, p.30). Por consequência, Legendre perdeu boa parte do seu capital.

Connor e Robertson (1999) descrevem um trecho da carta que o matemático escreveu a Jacobi (1804-1851) falando a respeito de sua falência. Na carta, Legendre cita sua esposa, Marguerite-Claudine Couhin, com quem se casou em 1792 e conviveu por 40 anos, sem deixar herdeiros. A carta diz:

> Eu me casei depois de uma sangrenta revolução que destruiu a minha pequena fortuna; tivemos grandes problemas e alguns momentos muito difíceis, mas minha esposa incondicionalmente me ajudou a colocar as coisas em ordem, pouco a pouco e me deu a tranquilidade necessária para o meu trabalho habitual e para escrever novas obras que têm vindo a aumentar a minha reputação.[7](CONNOR; ROBERTSON, 1999, s/p, tradução nossa)

Boyer (1974) afirma que Legendre era um homem tímido e reservado, mas resistente às ordens do governo com a Academia de Ciências. Inclusive, em 1824, se recusou a votar no candidato ao governo para o *Institut National*. Por consequência, sofreu politicamente e teve sua pensão interrompida. Legendre morreu na pobreza de uma dolorosa doença, em Auteil, Paris, no dia 10 de janeiro de 1833.

Sua vida foi marcada por uma série de publicações sobre integrais elípticas, teoria dos números e outras partes da Matemática, Física e Astronomia. De todos os seus trabalhos, destacamos a criação do Método dos Mínimos Quadrados que, apesar do seu objetivo estritamente físico e astrônomo, contribui para todas as áreas da ciência até os dias atuais.

---

[7]I married following a bloody revolution that had destroyed my small fortune; we had great problems and some very difficult moments, but my wife staunchly helped me to put my affairs in order little by little and gave me the tranquillity necessary for my customary work and for writing new works which have steadily increased my reputation.

4.2 O MÉTODO DOS MINÍMOS QUADRADOS

A palavra *Estatística* tem origem do latim *status*, que significa Estado. De fato, os primeiros trabalhos na área de Estatística que se tem registro foram todos de interesse do Estado em contar a sua população. Os levantamentos de dados populacionais tinham como objetivos o alistamento militar (conhecer os homens aptos a guerrear), a taxação de impostos e a averiguação dos recursos econômicos e de mão-de-obra. Estes dados são tão antigos quanto se podem imaginar. Bayer; et al (2004) afirmam que o primeiro dado estatístico disponível foi o de registros egípcios de presos de guerra na data de 5000 a.C.. Também é possível encontrar registros datados em 3000 a.C. da falta de mão-de-obra egípcia para construir as pirâmides. Os autores ainda contam que todos os egípcios tinham que, anualmente, declarar suas fontes de rendimentos. Caso contrário, eram julgados à pena de morte.

No Brasil, o primeiro censo geral da população brasileira foi feito em 1872. Sessenta e cinco anos depois foi criado o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) que funciona ativamente até os dias atuais.

No entanto, o estudo da Estatística não se resume apenas a contagem da população. Alguns matemáticos importantes contribuíram para essa abrangência da Estatística, como Laplace e Gauss, no início do século XIX (YULE; KENDALL, 1950 apud SZWARCWALD; CASTILHO, 1992). Estes matemáticos transformaram a concepção da Estatística. Este ramo da ciência passou a não somente designar interesses para o Estado, mas também a aceitar os erros de uma observação.

Eves (2011, p.463) comenta que o “veio principal da matemática desses homens teve como origem e como meta as aplicações do cálculo à mecânica e à astronomia”. A compreensão dessas ciências se fazia necessária para resolver problemas da época como a localização de corpos celestes. Eves (2011, p.463) ainda afirma que “foi só no século XIX que a pesquisa matemática se emancipou dessas balizas científicas” visto os problemas econômicos e tecnológicos surgidos neste século devido a industrialização de parte da Europa e nos Estados Unidos. Com a Matemática deixando de ser tratada apenas como uma ciência pura e sendo mais aplicada e especializada, surge a *Estatística*

Matemática. Este novo estudo gerou uma série de ferramentas para a interpretação dos dados surgidos da observação e da experimentação.

No século XVIII, uma das principais preocupações dos astrônomos era com as observações dos movimentos da Lua e dos planetas. Boyer (1974) conta que foi no primeiro dia do século dezenove que um novo planeta ou asteroide, Ceres[8], fora descoberto. Poucas semanas depois de sua visualização, o pequeno corpo celeste fora perdido de vista. Como as medições realizadas sempre divergiam, a maior parte dos cientistas:

> escolhia dentre suas medições um único 'número áureo' – considerado essencialmente por palpite, ser o mais confiável dos resultados obtidos. Isso se dava por não considerarem a variação como um subproduto inevitável do processo de medição, e sim como evidência de fracasso [...] raramente publicavam múltiplas medições de uma mesma quantidade, pois sentiam que isso seria como confessar que o processo era defeituoso, o que despertaria dúvidas quanto à confiabilidade dos resultados. (MLODINOW, 2009, p.136)

Para atender a esta necessidade da Astronomia, no século XVIII e XIX, muitos matemáticos voltaram-se aos estudos dos erros aleatórios. As principais contribuições à Matemática neste século foram dadas por estudiosos como Adrien-Marie Legendre. O matemático foi uma imagem importante na Geodésia, estudando as órbitas e posições dos corpos celestes. Em conexão com estes estudos, ele desenvolveu o método estatístico denominado de Método dos Mínimos Quadrados (BOYER, 1974).

São muito comuns os erros aleatórios no ramo da ciência experimental, obrigando que os observadores não apenas aceitem a presença desses erros como obtenham estimativas confiáveis das variáveis estudadas. Em 1838, F. W.

---

[8]Ceres é um planeta-anão localizado entre Marte e Júpiter, praticamente invisível a olho nu. Foi descoberto pelo astrônomo Giuseppe Piazzi (1746-1826), em 1 de janeiro de 1801. A ele se deve o nome do planeta, cujo objetivo era fazer uma homenagem a deusa romana Ceres. Piazzi estava procurando por uma estrela, mas encontrou um objeto em movimento, o qual ele inicialmente pensou se tratar de um cometa. Ele registrou todas as mudanças de posições orbitais do Ceres por 19 observações feitas durante 42 dias, quando, em 12 de fevereiro de 1801, o objeto desapareceu no brilho do Sol. A menos que se fizesse uma determinação precisa da trajetória do corpo via algum método matemático, redescobri-lo era imprevisível. (TENNENBAUM, 2006).

Bessel “categorizou onze classes diferentes de erros aleatórios que ocorrem em todas as observações telescópicas, incluindo expansão e contração do telescópio, os erros do observador, irregularidades na atmosfera, dentre outros”[9] (PORTER, 1986, p.96, tradução nossa). Aceitar esses erros como algo comum nas observações e saber como trabalhá-los é um dos papeis da Estatística, uma vez que:

> Obter *estimativas* a partir de *dados experimentais* sujeitos a erros aleatórios é o que chamaremos de *tratamento estatístico* de dados experimentais. Entre os diversos métodos disponíveis para o tratamento de dados experimentais sujeitos a erros aleatórios, o *Método dos Mínimos Quadrados* (MMQ) é, talvez, o mais popular deles e, certamente, um dos mais úteis. (OTAVIANO, 2006, p.1, grifo nosso)

Deste modo, com o objetivo de reduzir os erros provocados pelas medições astronômicas e poder determinar a trajetória exata de um corpo celeste, Legendre publicou em 1805 o MMQ. Para ele, o método era simples e geral. Consistia em tornar *mínima* a soma dos quadrados dos erros provocados pelas observações (LEGENDRE, 1805).

Embora não haja registros concretos, anos mais tarde à publicação de Legendre, Gauss (1777-1855) considerou ter prioridade na ideia do método. Ele argumentava que já o estudava desde 1795 (MEMÓRIA, 2004, p.19). Contudo, não foi a única vez em que Gauss se envolveu em histórias de plágio com algum outro estudioso matemático. A representação gráfica dos números complexos, por exemplo, ainda hoje não se sabe com certeza se foi obra de Gauss ou de Caspar Wessel (1745-1818). Sem provas, Legendre defendeu a criação do MMQ como sua. Ele ficou indignado e acusou Gauss de plágio. Inclusive, alertou seu amigo Jacobi para não divulgar seus estudos antes de publicá-los.

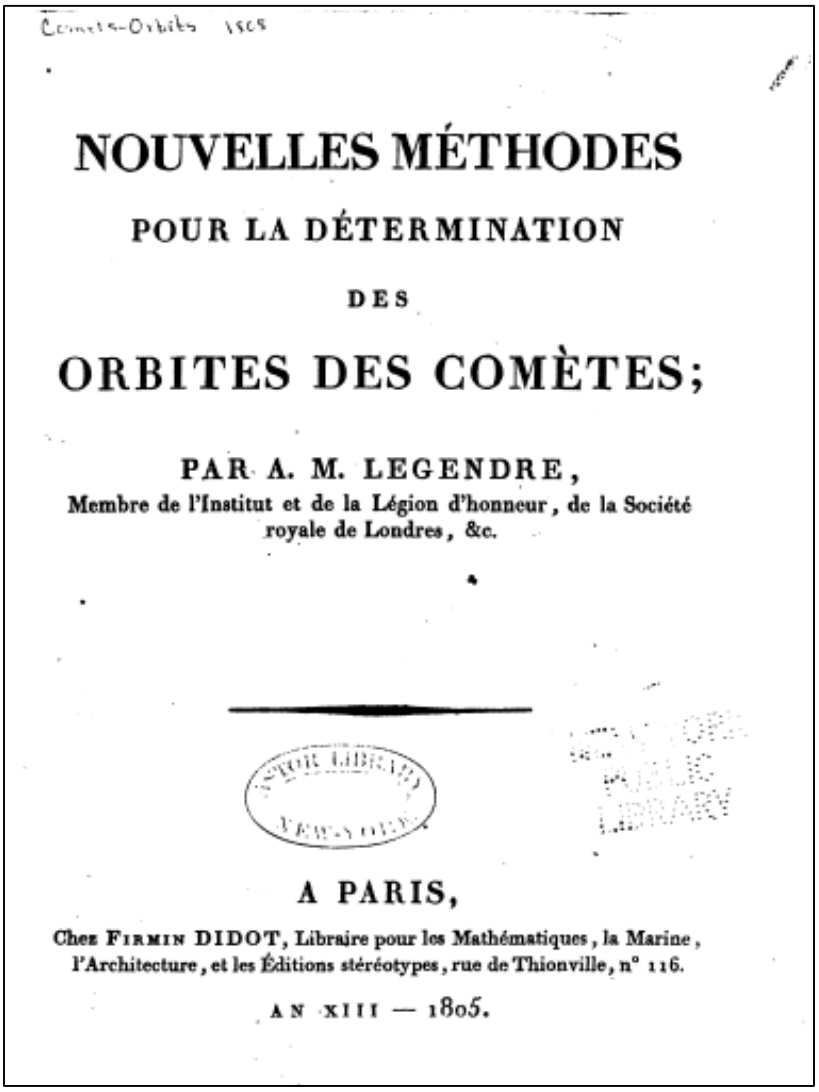
No entanto, se deve a Gauss a determinação da trajetória do objeto celeste desaparecido, o misterioso Ceres. Mas, sendo Gauss ou não o criador do MMQ, o fato é que este método apareceu pela primeira vez no apêndice do livro *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (Novos

---

[9] “Specified eleven different classes of random errors that occurred in every telescopic observation, including expansion and contraction of the telescope, errors of the observer, irregularities in the atmosphere and so on” (PORTER, 1986, p.96).

métodos para a determinação das órbitas dos cometas), publicado por Legendre, em 1805. Na figura 4, podemos ver a capa deste livro.

Figura 4 – Capa do livro Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes



NOUVELLES MÉTHODES

POUR LA DÉTERMINATION

DES

ORBITES DES COMÈTES;

PAR A. M. LEGENDRE,

Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture, et les Éditions stéréotypes, rue de Thionville, n° 116.

AN XIII — 1805.

Fonte: Legendre (1805, p.8).

A obra foi eleita em 2006 "um dos trinta livros de Matemática mais importantes ao longo de 25 séculos, onde, pela primeira vez, apareceu a teoria dos mínimos quadrados que é o fundamento da Análise Estatística" (SILVA, 2010, p.55). Por este motivo, elegemos a obra como base para elaboração do nosso produto. Por meio de sua tradução e análise, entendemos a definição e a demonstração do método. Com estas informações, fica mais fácil o docente

compreender e interpretar os ajustes automáticos realizados pelo programa utilizado.

Em nossa leitura, percebemos que o objetivo do livro é simplificar as fórmulas e equações que servem para determinar os elementos da órbita dos cometas a partir de dados imediatos da observação e, assim, minimizar os erros obtidos, pois:

> problemas físicos e astronômicos, onde se procura determinar alguns elementos importantes, necessariamente entra a arbitrariedade na distribuição dos erros, e não devemos esperar que todas as hipóteses levem a exatamente os mesmos resultados, mas devemos acima de tudo, garantir que os erros extremos, sem levar em conta seus sinais, estejam encerrados nos limites mais estreitos possíveis.[10](LEGENDRE, 1805, p.72, tradução nossa)

O próprio Legendre afirma no seu livro que o MMQ é de grande utilidade em todas as questões de Física e de Astronomia em que se necessita obter resultados exatos de observações. Ainda acrescenta que o leitor encontrará no apêndice a aplicação do método para as medidas do meridiano da França.

Tais experiências astronômicas são inviáveis de se reproduzir pelos estudantes (devido a falta de equipamentos e espaço adequados, dentre outros recursos). Desse modo, as atividades históricas propostas em nosso produto se limitaram às experiências de análises estatísticas, onde o método também é relevante, visto que:

> O Método dos Mínimos Quadrados é o automóvel da análise Estatística moderna: apesar de suas limitações, acidentes ocasionais e poluição acidental, este método e suas inúmeras variações, extensões e meios de transmissão relacionados realizam a maior parte das análises Estatísticas, e são

---

[10]problêmes physiques et astronomiques, où l'on cherche à déterminer quelques élémens importans, il entre nécessairement de l'arbitraire dans la distribution des errurs, et on ne doit pas s'attendre que toutes les hypothèses conduiront exactement aux mêmes résultats; mais il faut sur-tout faire en sorte que les erreurs extremes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible. (LEGENDRE, 1805, p.72)

> conhecidos e valorizados em quase tudo[11]. (STIGLER, 1999, p. 320, tradução nossa)

Vale ressaltar que, no apêndice da obra em que Legendre menciona o método (ver figura 5), a demonstração é realizada para *casos contínuos*, isto é, considerando infinitas observações.

Figura 5 – As duas primeiras páginas do apêndice

APPENDICE.

Sur la Méthode des moindres quarrés.

Dans la plupart des questions où il s'agit de tirer des mesures données par l'observation, les résultats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on est presque toujours conduit à un système d'équations de la forme

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.$$

dans lesquelles a, b, c, f, &c. sont des coëfficiens connus, qui varient d'une équation à l'autre, et x, y, z, &c. sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de E se réduise, pour chaque équation, à une quantité ou nulle ou très-petite.

Si l'on a autant d'équations que d'inconnues x, y, z, &c., il n'y a aucune difficulté pour la détermination de ces inconnues, et on peut rendre les erreurs E absolument nulles. Mais le plus souvent, le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, et il est impossible d'anéantir toutes les erreurs.

Dans cette circonstance, qui est celle de la plupart des problêmes physiques et astronomiques, où l'on cherche à déterminer quelques élémens importans, il entre nécessairement de l'arbitraire dans la distribution des erreurs, et on ne doit pas s'attendre que toutes les hypothèses conduiront exactement aux mêmes résultats; mais il faut sur-tout faire en sorte que les erreurs extrêmes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible.

De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre

minimum la somme des quarrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connoître l'état du système le plus proche de la vérité.

La somme des quarrés des erreurs $E^2 + E'^2 + E''^2 +$ &c. étant

$$\begin{aligned}&(a + bx + cy + fz + \&c.)^2\\ &+ (a' + b'x + c'y + f'z + \&c.)^2\\ &+ (a'' + b''x + c''y + f''z + \&c.)^2\\ &+ \&c.;\end{aligned}$$

si l'on cherche son *minimum*, en faisant varier x seule, on aura l'équation

$$o = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bf + \&c.,$$

dans laquelle par $\int ab$ on entend la somme des produits semblables $ab + a'b' + a''b'' +$ &c.; par $\int b^2$ la somme des quarrés des coëfficiens de x, savoir $b^2 + b'^2 + b''^2 +$ &c., ainsi de suite.

Le *minimum*, par rapport à y, donnera semblablement

$$o = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int fc + \&c.,$$

et le *minimum* par rapport à z,

$$o = \int af + x\int bf + y\int cf + z\int f^2 + \&c.,$$

où l'on voit que les mêmes coëfficiens $\int bc$, $\int bf$, &c. sont communs à deux équations, ce qui contribue à faciliter le calcul.

En général, *pour former l'équation du* minimum *par rapport à l'une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chaque équation proposée par le coëfficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et faire une somme de tous ces produits.*

On obtiendra de cette manière autant d'équations du *minimum*, qu'il y a d'inconnues, et il faudra résoudre ces équations par les méthodes ordinaires. Mais on aura soin d'abréger tous les calculs, tant des multiplications que de la résolution, en n'admettant dans chaque opération que le nombre de chiffres

Fonte: Legendre (1805, p.72-73).

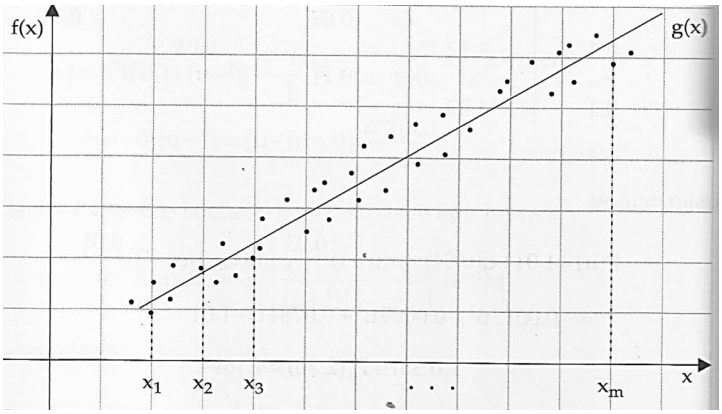
[11]The method of least squares is the automobile of modern statistical analysis: despite its limitations, occasional accidents, and incidental pollution, this method and its numerous variations, extensions, and related conveyances carry the bulk of statistical analyses, and are know and valued by nearly all.

É possível visualizar nas duas primeiras páginas do apêndice, mostradas na figura 5 anterior, que no processo da demonstração do MMQ, se faz uso da aplicação de integrais (limite de somas infinitas), justamente por se tratar de um conjunto infindo de observações astronômicas. Contudo, como o enfoque do trabalho é o uso do método para análise de RL no ensino de Função Afim e Estatística no Ensino Médio, nos limitamos a falar do *caso discreto*, ou seja, um *conjunto finito de observações com duas variáveis envolvidas*.

Mas afinal, em que consiste o MMQ?

Suponha que um observador faz *n* observações (1, 2, 3, ..., *n*) de duas variáveis distintas (*x* e *y*). Obtém como resultado um conjunto de pontos, isto é, de pares ordenados $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); ...; (x_n, y_n)\}$. Estes pontos são dispostos em um plano cartesiano como mostrado na figura 6 a seguir. É possível que o observador preveja o valor de uma variável conhecendo a outra. Se em suas próximas observações ele obtém apenas o valor de x_{n+1}, por exemplo, é possível estimar o valor de y_{n+1} e/ou vice-versa, sem fazer uma nova observação. Para tanto, após os pontos serem distribuídos em um plano cartesiano (conforme a figura 6), ajusta-se os pontos à uma reta e estima-se a função $y = a + bx$ de ajuste, isto é, a função que representa a reta que ajusta os pontos. Cabe enfatizarmos que o objetivo não é a reta *passar* ou *cortar* o máximo de pontos possíveis, mas sim se posicionar no plano de modo a ficar na menor distância possível entre os pontos distribuídos, como podemos visualizar na figura 6.

Figura 6 – Exemplo de disposição de pontos obtidos em um experimento



Fonte: Arenales e Darezzo (2014, p.158).

Aqui, estamos tratando $y = a + bx$ e não $y = ax + b$, como é mais usualmente conhecido. Desejamos, com isso, mantermos a fidelidade na obra que tomamos por base, visto que historicamente as funções obtidas nos processos de minimização dos erros observacionais são do tipo $y = a + bx$. No apêndice que Legendre demonstra o MMQ, ele diz que:

> Na maioria das investigações onde o objetivo é deduzir os resultados mais precisos das medidas observacionais, somos levados a um sistema de equações da forma: E = a + bx + cy + fz + etc. onde a, b, c, etc. são coeficientes conhecidos, variando de uma equação para a outra, e x, y, z, etc. são incógnitas de quantidades a serem determinadas pela condição de cada valor de E se reduzida ou a zero ou a uma quantidade muito pequena[12]. (LEGENDRE, 1805, p.72, tradução nossa)

Assim, optamos por trabalhar com a representação histórica ao invés da usual. Primaremos, neste trabalho, pelo significado independente dos símbolos. Além disso, a apresentação da lei de formação da função com símbolos e/ou formas diferentes permite que o estudante não se limite apenas às notações comuns, evitando a memorização em detrimento da compreensão.

Para encontrar a função de melhor ajuste, devemos encontrar primeiramente os valores dos parâmetros *a* e *b*. Para tanto, se usa o Método dos Mínimos Quadrados. “Para falar em ‘melhor ajuste’, temos que ter um critério para a escolha dos parâmetros [...], isto é, ter uma medida para o erro cometido nessa aproximação” (ARENALES; DAREZZO, 2014, p.159). O erro mencionado por Arenales e Darezzo é exatamente a distância entre a reta de ajuste (função *g*) e os pontos fora da reta (função *f*), como mostra a figura 6. O MMQ tenta minimizar esta distância.

Arenales e Darezzo (2014) definem $e(x_i) = f(x_i) – g(x_i)$ como sendo o erro ou desvio cometido numa aproximação de uma função $f(x)$ por uma função $g(x)$,

---

[12]Dans la plupart questions où il s'agit de tirr des mesures donnéses par l'observation, les résuçtats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on este presque toujours conduit à un syestême d'équations de la forme: E = a + bx + cy + fz + &c. dans lesquelles a, b, c, f, &c. sont des coëfficiens connus, qui varient d'unes équation à l'autre, et x, y, z, &c. sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de E se réduise, pour chaque équation, à une quantilé ou nule ou très-petite. (LEGENDRE, 1805, p.72)

nos pontos x_i ; $i=1, ..., m$. Deste modo, explicam como o Método dos Mínimos Quadrados minimiza o erro fazendo o quadrado das distâncias. Não é usado o módulo das distâncias uma vez que estes valores só podem ser positivos e são encontrados pela diferença de suas posições inicial e final. Assim:

> considerando o exemplo da figura anterior, desejamos encontrar uma função $g(x) = ax + b$ que melhor se aproxime da função $f(x)$, de forma que $E(a, b) = \sum_{i=1}^{m} e(x_i)^2$ seja mínimo. Do cálculo diferencial, se a função $E(a, b)$ possui um ponto de mínimo então suas derivadas parciais devem ser nulas, isto é, $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{a}} = 0$ e $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{b}} = 0$. (ARENALES; DAREZZO, 2014, p.159-160)

É a partir dessas derivações que se obtém um sistema de duas equações do primeiro grau, as quais fornecerão os valores dos parâmetros *a* e *b* procurados para função de ajuste *g(x)*. Esse método "assume que a função que melhor aproxima um conjunto de pares ordenados conhecidos é aquela que possui a soma mínima dos desvios ao quadrado" (NASCIMENTO, 2013, p.22) e é por isso que fazemos $E_1^2 + E_2^2 + ... + E_n^2 = 0$ para minimizar os erros. Vê-se, portanto, que o MMQ revela "o centro em torno do qual se organizam todos os resultados fornecidos pela experiência de modo a se distanciar o mínimo possível". (LEGENDRE, 1805, p.75, tradução nossa)[13]

Em suma, da equação $y = a + bx + E$, onde E é denominado de erro da observação, concluímos que $E = y - a - bx$. Tomando dois conjuntos de observações *x* e *y*, temos:

$$E_1 = y_1 - a_1 - b_1x_1 \qquad \text{equação (1)}$$

e

$$E_2 = y_2 - a_2 - b_2x_2 \qquad \text{equação (2)}$$

Ao minimizarmos os erros fazendo $E_1^2 + E_2^2 = 0$ obteremos duas novas equações que servirão para encontrar os parâmetros *a* e *b*. Estas equações

---

[13]On voit donc que la méthode des moindres quarrés fait connoître, em quelque sorte, le centre autour duquel viennent se ranger tous les résultats fournis par l'expérience, de manière à s'en écarter le moins qu'il est possible. (LEGENDRE, 1805, p.75)

serão as derivadas parciais em relação a cada um dos parâmetros, igualadas a zero para obter os pontos críticos (possíveis valores de mínimo), isto é:

$$\frac{\partial\,(E_1{}^2 + E_2{}^2)}{\partial a} = 0 \qquad \text{equação (3)}$$

e

$$\frac{\partial\,(E_1{}^2 + E_2{}^2)}{\partial b} = 0 \qquad \text{equação (4)}$$

De forma a simplificar as deduções e nos fazer melhor compreendidos, tomemos como exemplo duas observações fictícias simples de dois fenômenos distintos *x* e *y,* que dão como resultado aleatório os pares ordenados $(x_1, y_1) = (1, 2)$ e $(x_2, y_2) = (3, 4)$. Colocamos estes dados em um quadro mostrado na tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Resultados fictícios de duas observações de dois fenômenos distintos

Observação	Fenômeno x	Fenômeno y
1ª	1	2
2ª	3	4

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Neste exemplo, temos que:

$$E_1 = 2 - a_1 - b_1 \cdot 1 \qquad \text{equação (5)}$$

e

$$E_2 = 4 - a_2 - b_2 \cdot 3 \qquad \text{equação (6)}$$

Calculando o quadrado de cada erro, fica:

$$E_1{}^2 = (1 - a - b) \cdot (1 - a - b) = 4 - 4a - 4b + 2ab + a^2 + b^2 \qquad \text{equação (7)}$$

e

$$E_2{}^2 = (4 - a - 3b) \cdot (4 - a - 3b) = 16 - 8a - 24b + 6ab + a^2 + 9b^2 \qquad \text{equação (8)}$$

E a sua soma resulta em:

$$E_1^2 + E_2^2 = 20 - 12a - 28b + 8ab + 2a^2 + 10b^2 = 0 \qquad \text{equação (9)}$$

Por fim, a derivada parcial em relação a cada um dos parâmetros será:

$$\frac{\partial\,(E_1{}^2 + E_2{}^2)}{\partial a} = -12 + 8b + 4a \qquad \text{equação (10)}$$

e

$$\frac{\partial\,(E_1{}^2 + E_2{}^2)}{\partial b} = -28 + 8a + 20b \qquad \text{equação (11)}$$

Finalmente, igualando a zero e por meio de um sistema dessas duas equações lineares encontradas, obtemos *a = 1* e *b = 1*, o que resulta em *y = 1 + x*.

Vuolo (1996) explica que todo o processo realizado pelo MMQ para ajustar a reta a um conjunto de pontos experimentais é conhecido como Regressão Linear. Daí vem a importância ímpar do método para a Estatística. Hoje ele é usado em inúmeras áreas da ciência, incluindo as humanas, mas "a exploração de suas sutilezas e potencial levou mais de um século"[14] (STINGLER, 1986, p.11, tradução nossa).

Contudo, a associação do método com a análise de regressão, criação de Galton, não se deu de forma rápida, tão pouco facilmente. É o que veremos a seguir, no terceiro capítulo desta dissertação que trata da história de vida e da teoria desenvolvida por Galton.

---

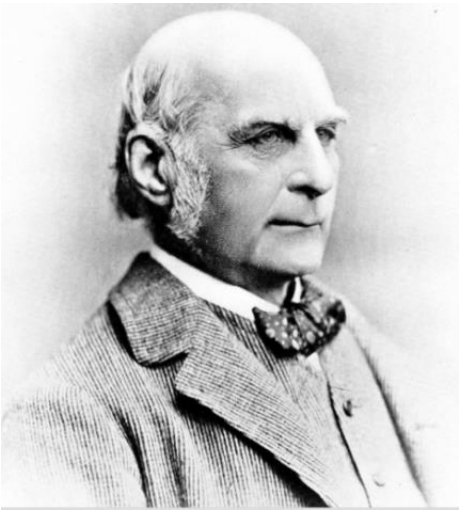
[14]"the exploration of its subtleties and potencial took over a century." (STINGLER, 1986, p.11)

5 FRANCIS GALTON E A REGRESSÃO LINEAR

Ao contrário de Legendre, existem sites governamentais com publicações de Galton, fotos particulares do matemático e seus objetos pessoais, além de livros destinados a relatar com detalhes fatos da História da Estatística. Dentre eles, destacamos Stigler (1986), Stigler (1999), Memória (2004), Salsburg (2009) e Mlodinow (2009). Estas foram nossas principais fontes de referências para produção deste capítulo e que também serviram como base para a elaboração das nossas atividades históricas. Assim, este capítulo se destina a apresentação da história e teoria de Galton, como segue.

5.1 FRANSCIS GALTON (1822-1911)

Figura 7 – Imagem de Francis Galton aos 73 anos



Fonte: Pearson (1924, p.1).

Francis Galton nasceu em 1822, nas proximidades de Birmingham, Inglaterra. Era o mais novo dentre os seus nove irmãos e por insistência do seu pai, aos 16 anos, foi estudar medicina no Birmingham General Hospital, como assistente de médico. Por curiosidade, começou a tomar, em ordem alfabética, os medicamentos da farmácia do hospital, registrando os efeitos causados por cada um deles. Segundo Schultz, D. P. e Schultz, S. E. (2013, p.136), “essa

aventura científica teve fim na letra ‘C’, quando tomou uma dose de óleo de cróton, um forte laxante”.

Quando Galton tinha 22 anos, seu pai faleceu, deixando-o herdeiro de uma grande fortuna. Nessa mesma época, o jovem abandonou a medicina e viajou por toda a África, fazendo viagens difíceis e perigosas somente por prazer. Há indícios de que foi nesta viagem que Galton contraiu uma doença venérea, possível motivo de não ter tido filhos.

Parou de viajar aos 28 anos, quando se casou. Ainda assim, publicou histórias sobre suas viagens. Um guia intitulado *The Art of Travel* (A Arte de Viajar), fez tanto sucesso que “foi publicado em oito edições, em oito anos, e reimpresso em 2001” (SCHULTZ, D. P.;SCHULTZ, S. E., 2013, p.136). Também recebeu uma medalha da *Royal Geographic Society* (Sociedade Real de Geografia) pela publicação. Nos anos seguintes, interessou-se por estudos meteorológicos que resultou no desenvolvimento do tipo de mapa meteorológico utilizado até hoje.

Figura 8 – Foto da agenda de Galton com registros de digitais

Fonte: Rose, H. e Rose, S. (2011, p.1397).

Na figura 8 anterior, há a imagem da agenda de Galton. Nela, podemos observar registros de impressões digitais à direita da figura. Salsburg (2009) comenta que Galton ficou conhecido por descobrir as impressões digitais. Isso

porque Galton também se interessou por este estudo. Ele observou que as impressões digitais são únicas em casa indivíduo e criou métodos para identificar e classificar essas impressões. As marcas e cortes irregulares de cada dedo são chamadas até hoje de marcas de Galton. (SALSBURG, 2009). Seu estudo originou o método de identificação criminal adotado pela polícia de Londres em 1901 e posteriormente difundida no mundo inteiro.

Na figura 9 a seguir, observamos a impressão da própria mão do matemático.

Figura 9 – Registro da impressão da mão de Galton realizada pelo próprio

Fonte: UCL (s/d, s/p).

Francis Galton era fascinado por medidas. Media o tamanho de cabeças, narizes e membros, o número de vezes que as pessoas remexiam as mãos e os pés enquanto assistiam a uma aula. Mediu até mesmo a ineficácia das orações através da observação do comportamento das pessoas (a frequência com que bocejavam ou batiam as pernas) nas igrejas enquanto acompanhavam uma missa. (MLODINOW, 2009)

A mãe de Galton, Frances Ann Violeta Darwin (1783-1874), era neta de Erasmus Darwin (1731-1802), que por sua vez era avô de Charles Darwin (1809-1882), donde se estabelece o parentesco entre Galton e Charles Darwin: eram primos.

Charles Robert Darwin, ou simplesmente Darwin, como ficou mais conhecido, era um biólogo inglês que conquistou seu espaço e fama com a

publicação do livro *A Origem das Espécies*, em 1859, no qual divulgou pela primeira vez a *Teoria da Evolução*, resultado de uma viagem pelo mundo e de mais de 20 anos de estudos. Na obra, Darwin explica sua teoria baseada na seleção natural das espécies. O biólogo tratou a evolução como um processo natural de mudança, isto é, uma *descendência com modificação* das espécies (GOULD, 1997). Com base nessa *seleção natural*, Galton propôs a *seleção artificial*, e criou a *Eugenia*, se transformando "de geógrafo amador em antropólogo e eugenista" (MEMÓRIA, 2004, p.22).

Traduzido do grego, a palavra *eugenia* significa *bom nascimento*. Ela foi cunhada pelo próprio Galton, em 1833. Para ele, tratava de um novo campo de estudos. Seu objetivo era *melhorar* a espécie humana com a procriação por casais selecionados.

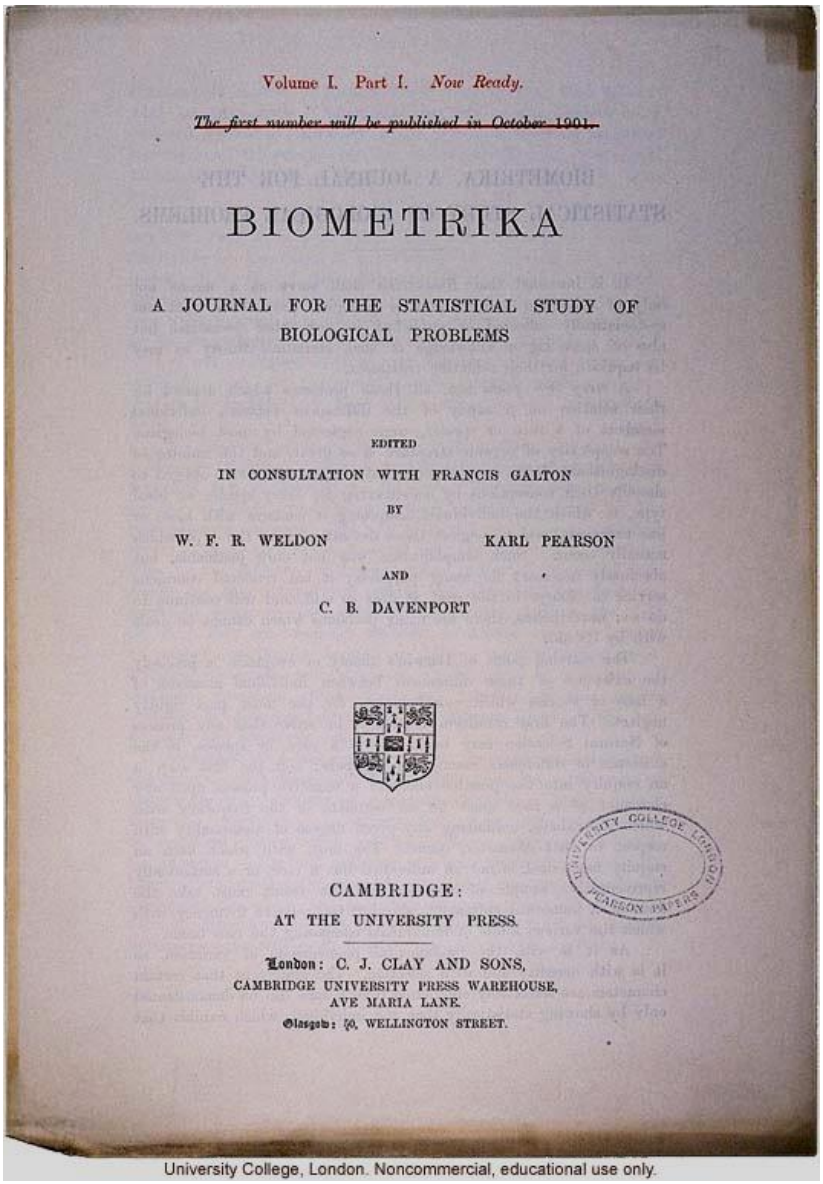
Galton se dedicou com afinco a esse estudo e para dar continuidade aos trabalhos, a fortuna deixada pelo seu pai destinou:

> filantropicamente 45 mil libras esterlinas para a fundação de uma cátedra de Eugenia, na Universidade de Londres e, 200 libras esterlinas para a publicação de uma revista destinada às aplicações da Estatística à herança biológica, denominada Biometrika, cujo primeiro número saiu em 1901, e é publicada até hoje, sem interrupção, embora com a finalidade ampliada. Em 1904, fundou um laboratório de pesquisas sobre a genética humana, que veio a ser denominado Galton Laboratory of National Eugenics cujo primeiro diretor foi Karl Pearson, que com o próprio Galton, foram os fundadores da Escola Biométrica. Em reconhecimento as suas inúmeras contribuições, foi-lhe concedido o título honorífico de Sir, em 1909. (MEMÓRIA, 2004, p.25)

Na figura 10 a seguir é exibida a capa da revista intitulada *Biométrica*. Podemos constatar que na capa, além de Francis Galton, fundador e financiador da revista, também estão incluídos como editores Walter Frank Raphael Weldon (1860-1906), professor de Zoologia em Cambridge e amigo próximo de Galton, e Karl Pearson (1857-1936), um dos discípulos de Galton que aperfeiçoou e deu continuidade aos trabalhos do eugenista.

A revista Biométrica (ou *Biometrika*) foi a primeira revista a publicar fotografias coloridas. Era impressa em papel de alta qualidade e exibia as mais complicadas fórmulas matemáticas. (SALSBURG, 2009)

Figura 10 – Capa da primeira edição da revista Biometrika



Volume I. Part I. *Now Ready.*

~~*The first number will be published in October 1901.*~~

BIOMETRIKA

A JOURNAL FOR THE STATISTICAL STUDY OF BIOLOGICAL PROBLEMS

EDITED

IN CONSULTATION WITH FRANCIS GALTON

BY

W. F. R. WELDON KARL PEARSON

AND

C. B. DAVENPORT

CAMBRIDGE:

AT THE UNIVERSITY PRESS.

London: C. J. CLAY AND SONS,

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS WAREHOUSE,

AVE MARIA LANE.

Glasgow: 50, WELLINGTON STREET.

UNIVERSITY COLLEGE LONDON PEARSON PAPERS

University College, London. Noncommercial, educational use only.

Fonte: University College (s/d, s/p).

Após a morte de Weldon, em um acidente de esqui, e de Galton, aos 88 anos de idade, Pearson se tornou o único editor da publicação da revista, bem como o único administrador do fundo.

Não encontramos registros do motivo da morte de Galton, mas seus muitos anos de vida foram marcados por grandes criações como a Eugenia e a Regressão Linear a qual trataremos mais detalhadamente a seguir.

5.2 A EUGENIA DE GALTON E A ORIGEM DA REGRESSÃO LINEAR

A Inglaterra foi o primeiro país a se industrializar. Isso se deu pelo fato da Revolução Industrial depender da criação de um sistema de fábricas mecanizado a ponto de produzir em larga escala e a baixos custos, de modo a criar seu próprio mercado independente (CANÊDO, 1994). Segundo Canêdo (1994, p.31):

> somente uma indústria estava em condições de oferecer recompensas para o fabricante expandir sua produção por meio de inovações simples e barata: a do algodão, que havia se desenvolvido na Inglaterra [...]. diferente de outros países, a agricultura inglesa estava predominantemente dirigida para o mercado e preparada para aumentar a produção, de modo a alimentar uma propriedade agrícola em rápido crescimento e fornecer excedentes de mão-de-obra para as cidades e as indústrias.

Dessa maneira aconteceu a Revolução Industrial na Inglaterra por volta de 1820 e até dez anos depois, a industrialização ainda era um fenômeno exclusivamente inglês.

Fazendeiros abandonaram suas terras para viver na cidade, investir nas indústrias. Trabalhadores rurais se viram obrigados a se transformarem em proletariados para não morrer de fome. Mesmo com jornadas diárias excessivas, péssimos salários e más condições de trabalho, a imigração dos camponeses superlotou as cidades inglesas que não estavam preparadas, em termos estruturais, para recebê-los. As “novas cidades eram mais feias e seu proletariado mais pobre do que em outros países” (HOBSBAWM, 1994, p.69). Em 1850, entre os 2,5 milhões de habitantes em Londres, era fácil se deparar com ruas lotadas de pessoas vivendo em situações degradantes. O contraste entre os trabalhadores e a burguesia era demasiadamente significativa. O operário “não podia compreender racionalmente porque precisamente ele, fazendo pela sociedade o que não faziam os ricos ociosos, tinha de suportar condições tão horríveis” (ENGELS, 2008, p.248). Dessa forma, o crescimento da população urbana foi acompanhado pelo aumento de roubos, assassinatos, prostituição e alcoolismo. Sem dinheiro para se alimentarem e vivendo sem o mínimo de higiene, milhares de pessoas morreram de epidemias.

O governo pouco fazia para melhorar a situação dos pobres. Via tal situação não como um problema social, mas sim como prova da falta de caráter e de moralidade dos indivíduos pobres. “Sua pobreza atrai sobre ele a suspeição acerca de todos os delitos imagináveis” (ENGELS, 2008, p.313).

Diante deste contexto histórico, Francis Galton procurava sustentar que se não houvesse um controle da qualidade reprodutiva dos indivíduos da sociedade, em pouco tempo o resultado seria o avanço reprodutivo de pessoas degeneradas. Ou seja, “os melhores membros da sociedade seriam suplantados reprodutivamente pelos indivíduos menos qualificados” (CONT, 2008, p.207). Isso significava que a sociedade teria mais pessoas delinquentes, criminosas, com distúrbios mentais, dentre outras mazelas.

Galton acreditava que os aspectos físicos, o talento e a capacidade intelectual dos indivíduos eram heranças de seus pais. Também defendeu que essas características poderiam ser calculadas, administradas e estimuladas, por meio de casamentos criteriosos (CONT, 2008). Assim, criou a Eugenia como um novo ramo da ciência e se dedicou com afinco às pesquisas que comprovassem sua teoria.

Stepan (1991) explica que a Eugenia abrange

> os usos sociais para que o conhecimento da hereditariedade pudesse ser colocado de forma a atingir a meta de ‘melhor descoberta’. Outros, definiram eugenia como um movimento para ‘melhorar’ a raça humana ou, de fato, para preservar a ‘pureza’ de grupos particulares. Como ciência, a eugenia foi baseada na suposta nova compreensão das leis da hereditariedade humana. Como um movimento social, envolveu propostas que garantiu à sociedade uma melhoria constante da sua composição hereditária, incentivando a ‘encaixar’ os indivíduos em grupos e se reproduzirem[15]. (STEPAN, 1991, p.1, tradução nossa)

---

[15]the social uses to which knowledge of heredity could be put in order to achieve the goal of ‘better breeding’. Others defined eugenics as a movement to ‘improve’ the human race or, indeed, to preserve the ‘purity’ of particular groups. As a Science, eugenics was based on supposedly new understanding of the laws of human heredity. As a social movement, it involved proposals that society ensure the constant improvement of its hereditary makeup by encouraging ‘fit’ individual and groups to reproduce themselves. (STEPAN, 1991, p.1)

Contudo, a Eugenia não incentivava apenas a reprodução de casais selecionados, mas também previa evitar a reprodução daqueles com características degenerativas.

Embora não haja indícios de que Galton tenha sido condizente com os alemães, Mldodinow (2009) afirma que a expressão e algumas ideias eugênicas foram adotadas pelos nazistas. De fato, em 1933, o governo nazista sancionou uma lei que permitia esterilizar os doentes. Em 1935, Hitler cogitava a ideia de eliminar os indivíduos com doenças incuráveis, alegando que nos últimos 70 anos a população aumentou 50% enquanto que as doenças hereditárias em 450% (ARQUITETURA da destruição, 1992).

Sabemos que se trata de uma ideia preconceituosa e racista. Contudo, não podemos afirmar quais eram as reais intenções de Galton ao propor tal teoria. Dessa forma, embora temos ciência de que se trata de um tema passivo de discussão e que pode ser questionado pelos alunos no momento das atividades e, por este motivo, sugerimos dicas para discussão no produto educacional, focaremos este trabalho nas ideias matemáticas (e estatísticas) que envolvem a criação do inglês (a Regressão Linear).

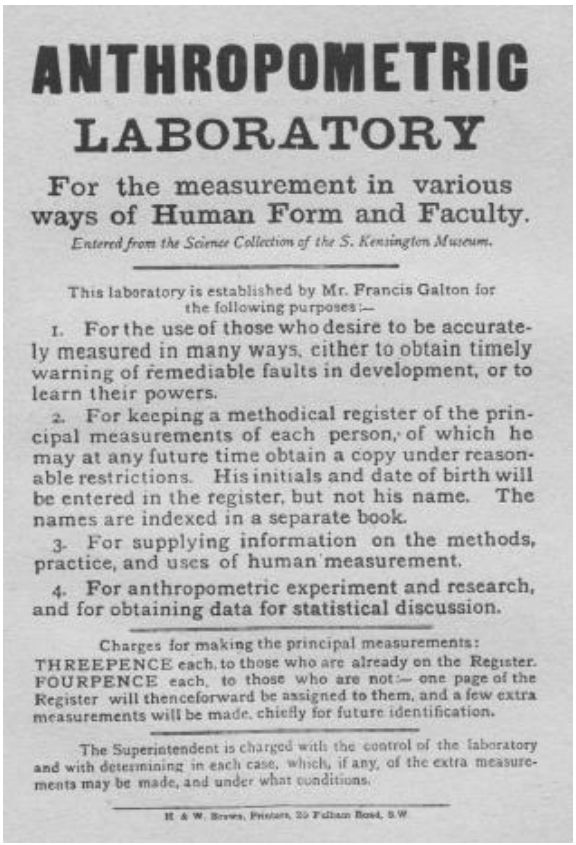
Galton tinha um conhecimento limitado sobre a hereditariedade, mas estava certo de que conseguiria comprovar sua teoria por meio da Estatística. Os dados a serem registrados e analisados proveriam das características que os progenitores e os seus ancestrais transmitiam à prole (CONT, 2008). Assim, em 1869 publicou o livro *Hereditary genius* (O gênio hereditário). O livro era resultado de uma pesquisa biográfica de famílias de pessoas famosas, como artistas, militares, poetas e intelectuais de diversas áreas. Neste estudo, Galton

> aplicou os conceitos estatísticos aos problemas da hereditariedade e classificou os homens extraordinários da sua amostragem em categorias, conforme a frequência com que seus níveis de capacidade ocorriam na população. Os dados comprovaram que os homens notáveis apresentavam maior probabilidade de terem filhos extraordinários do que os homens comuns. A amostragem consistia em 977 homens famosos [...] esperava-se que a expectativa seria de haver no grupo apenas um parente importante, no entanto, havia 332. (SCHULTZ, D. P.;SCHULTZ, S. E., 2013, p.138)

Contrariando esses resultados, em 1873, o botânico francês Alphonse de Candolle (1806-1893) publicou *Histoire des sciences et des savants depuis deux siècles* (História das ciências e dos sábios nos dois últimos séculos). O autor defendia que não era a hereditariedade, mas sim a educação e o ambiente social que desenvolveriam os indivíduos intelectualmente. Em resposta à obra, no ano seguinte, Francis Galton publicou *English men of Science: their nature and nurture* (Homens ingleses de ciência: sua natureza e nutrição).

Mesmo com estes estudos e publicações, Galton ainda necessitava de "uma teoria que descrevesse os mecanismos de transmissão tanto dos caracteres quanto dos talentos" (CONT, 2008, p.206). Por conselhos de seu primo Darwin, Galton passou a se dedicar à Matemática, muito embora seus conhecimentos nesta área fossem limitados, precisando, muitas vezes, contar com a contribuição de alguns amigos para o desenvolvimento de suas ideias. Assim, para obter mais dados estatísticos que pudesse analisar criteriosamente e usando a Estatística, Galton espalhou pelas ruas de Londres, o cartaz a seguir:

Figura 11 – Cartaz do Laboratório Antropométrico de Galton



ANTHROPOMETRIC
LABORATORY

For the measurement in various ways of Human Form and Faculty.

Entered from the Science Collection of the S. Kensington Museum.

This laboratory is established by Mr. Francis Galton for the following purposes:—

1. For the use of those who desire to be accurately measured in many ways, either to obtain timely warning of remediable faults in development, or to learn their powers.

2. For keeping a methodical register of the principal measurements of each person, of which he may at any future time obtain a copy under reasonable restrictions. His initials and date of birth will be entered in the register, but not his name. The names are indexed in a separate book.

3. For supplying information on the methods, practice, and uses of human measurement.

4. For anthropometric experiment and research, and for obtaining data for statistical discussion.

Charges for making the principal measurements: THREEPENCE each, to those who are already on the Register. FOURPENCE each, to those who are not:— one page of the Register will thenceforward be assigned to them, and a few extra measurements will be made, chiefly for future identification.

The Superintendent is charged with the control of the laboratory and with determining in each case, which, if any, of the extra measurements may be made, and under what conditions.

H. & W. Brown, Printers, 20 Fulham Road, S.W.

Fonte: Pearson (1924, p.358).

No cartaz, Galton convidava a população britânica para ser medida, dizendo:

> (1) Para uso daqueles que desejam ser medidos de diversas maneiras com exatidão, e também para conhecer a tempo defeitos remediáveis do desenvolvimento, e para conhecer os próprios poderes.
> (2) Para guardar um registro metódico das principais medidas de cada pessoa, do qual poderá, com algumas restrições razoáveis, obter no futuro uma cópia. Colocando suas iniciais e data de nascimento, mas não o seu nome. Os mesmos serão registrados em livro à parte.
> (3) Para obter informações sobre os métodos, práticas e usos das medidas humanas.
> (4) Para experimentação e investigação antropométricas, e para obter dados para discussão Estatística. (CONT, 2008, p.205)

Mas Galton não estava interessado apenas nas medições físicas. Ele também acreditava ser possível os seres humanos herdarem dos seus antecedentes as características intelectuais. Baseando-se na visão do filósofo empirista John Locke (1632-1704), que acreditava no conhecimento adquirido por meio dos sentidos, Galton entendia que “as pessoas mais inteligentes teriam os sentidos mais aguçados” (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.140). Partindo desse princípio, Francis Galton criou aparelhos para medir a capacidade sensorial dos indivíduos. Assim,

> Para determinar a frequência sonora mais alta, passível de detecção, inventou um apito, que testou em animais e em seres humanos. Caminhava pelo zoológico de Londres com uma bengala que tinha o apito afixado em uma ponta e na outra uma espécie de bexiga de borracha que ele apertava para tocar o apito, enquanto observava as reações dos animais. O apito de Galton tornou-se uma peça-padrão entre os equipamentos do laboratório de psicologia até ser substituído, na década de 1930, por um dispositivo eletrônico mais sofisticado. Entre outros instrumentos usados por Galton estão o fotômetro, para medir a precisão com que uma pessoa consegue encontrar dois pontos da mesma cor, um pêndulo calibrado, para medir a velocidade da reação à luz e ao som, e uma série de pesos ordenados para medir a sinestesia ou a sensibilidade muscular. Criou ainda uma barra com várias medidas de distância para testar a estimativa de extensão visual e conjuntos de recipientes contendo diversas substâncias para testar a distinção olfativa. Em sua maioria, os

> testes de Galton serviram como protótipos para equipamentos que se tornaram padrão de laboratório. [...] Além dessas medidas mencionadas, os funcionários do laboratório registravam a altura, o peso, a capacidade respiratória, a força de impulsão e compressão, a rapidez de sopro, a audição, a visão e a percepção cromática. Cada pessoa passava por um total de 17 testes. (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.141)

Na figura 12 a seguir, é possível ver a imagem do laboratório onde Galton fazia seus experimentos. O laboratório foi fundado em 1864, em Londres. Nele, Galton "arrumava os instrumentos para as medidas psicométricas e antropométricas sobre uma mesa comprida, no fundo de uma sala estreita, de mais ou menos 2 m de largura por 11 m de comprimento." (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.141).

Figura 12 – Laboratório Antropométrico de Galton

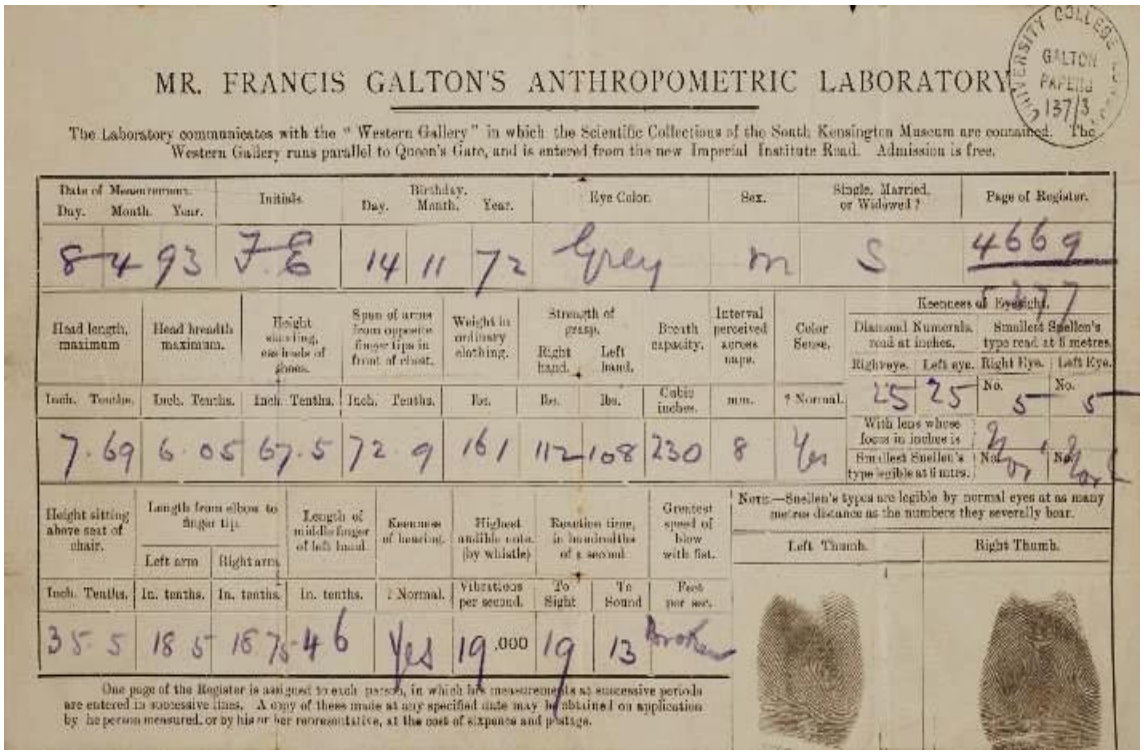
Fonte: UCL (s/d, s.p).

O visitante pagava três moedas de um centavo, se já possuísse cadastro ou, caso contrário, quatro moedas de um centavo que o daria direito a um registro e medidas extras. Mediante pagamento, cada pessoa "entrava, passava por todo o comprimento da mesa e um atendente realizava a avaliação e

registrava os dados em um cartão” (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.141).

O cartão com o registro de todas as medições de um dos pesquisados pode ser visto na figura 13 a seguir.

Figura 13 – Cartão de registro do Laboratório antropométrica



MR. FRANCIS GALTON'S ANTHROPOMETRIC LABORATORY

The Laboratory communicates with the "Western Gallery" in which the Scientific Collections of the South Kensington Museum are contained. The Western Gallery runs parallel to Queen's Gate, and is entered from the new Imperial Institute Road. Admission is free.

Date of Measurement. Day.	Month.	Year.	Initials.	Birthday. Day.	Month.	Year.	Eye Color.	Sex.	Single, Married, or Widowed?	Page of Register.
8	4	93	F.G	14	11	72	Grey	m	S	4669

Head length, maximum.	Head breadth, maximum.	Height sitting, ear lobes of bones.	Span of arms from opposite finger tips in front of chest.	Weight in ordinary clothing.	Strength of grasp. Right hand.	Left hand.	Breath capacity.	Interval perceived across nape.	Color Sense.	Keenness of Eyesight. Diamond Numerals read at inches. Right eye.	Left eye.	Smallest Snellen's type read at 6 metres. Right Eye.	Left Eye.
Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	lbs.	lbs.	lbs.	Cubic inches.	mm.	? Normal.	25	25	No. 5	No. 5
7.69	6.05	67.5	72.9	161	112	108	230	8	Yes	With lens whose focus in inches is			
										Smallest Snellen's type legible at 6 mtrs.		No. 1	No. 1

Height sitting above seat of chair.	Length from elbow to finger tip. Left arm	Right arm.	Length of middle finger of left hand.	Keenness of hearing.	Highest audible note (by whistle)	Reaction time, in hundredths of a second. To Sight	To Sound	Greatest speed of blow with fist.
Inch. Tenths.	In. tenths.	In. tenths.	In. tenths.	? Normal.	Vibrations per second.			Feet per sec.
35.5	18.5	18.75	4.6	Yes	19.000	19	13	Brother

Note.—Snellen's types are legible by normal eyes at as many metres distance as the numbers they severally bear.

Left Thumb. Right Thumb.

One page of the Register is assigned to each person, in which his measurements at successive periods are entered in successive lines. A copy of these made at any specified date may be obtained on application by the person measured, or by his or her representative, at the cost of sixpence and postage.

UNIVERSITY COLLEGE GALTON PAPERS 137/3

Fonte: UCL (s/d, s/p).

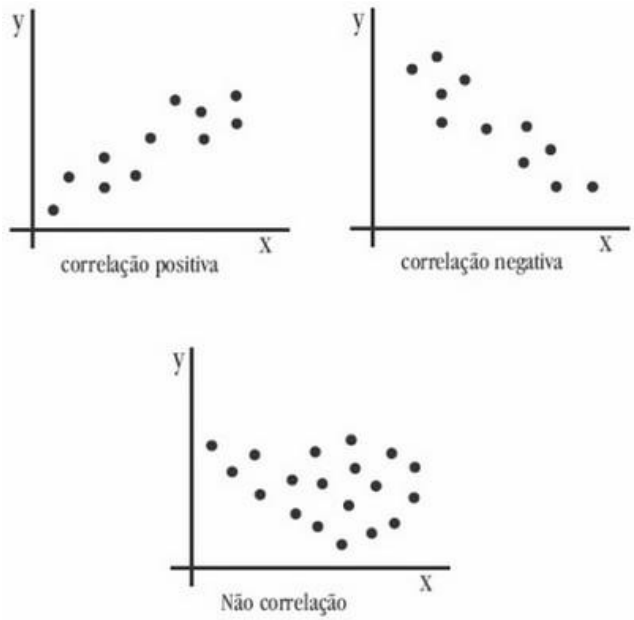
Durante seis anos, Galton conseguiu 9000 registros familiares, muitos deles completos, que levaram dez anos para serem analisados. Dentro dessas análises, a que ganhou mais destaque foi o estudo comparativo da estatura dos pais e seus respectivos filhos. Por meio desse estudo, Galton pode encontrar um método de estimar a altura que um filho teria, conhecendo apenas as alturas dos seus pais. Galton construiu um gráfico relacionando essas alturas. Se elas fossem sempre iguais, o gráfico seria uma linha ordenada, inclinada 45°, por razões trigonométricas. Mas,

> Se essa relação se mantivesse na média, mas os dados individuais variassem, então o gráfico mostraria algumas medidas acima e abaixo dessa linha. Os gráficos de Galton,

> portanto, ilustravam visualmente não só a relação geral entre as alturas de pais e filhos, como também o quanto essa relação se mantinha constante. Essa foi a outra *contribuição de Galton* à Estatística: *a definição de um índice matemático para descrever a consistência dessas relações*. Ele o chamou de *coeficiente de correlação*. (MLODINOW, 2009, p.173, grifo nosso)

O coeficiente de correlação[16], criado por Galton, é um número maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1. Este valor indica o quão forte ou fraco é um gráfico de dispersão de duas variáveis. Se o coeficiente de correlação for nulo, não há nenhuma relação entre as variáveis. Mas quanto mais perto de 1 ou -1, mais linear está a distribuição dos pontos no gráfico, indicando uma correlação forte, visto que a maioria dos pontos fora da reta estão bem próximos dela. Na figura 14 a seguir, vemos três exemplos de correlação:

Figura 14 – Exemplos de correlação



Fonte: Crespo (2009, p.147)

---

[16]O coeficiente de correlação é geralmente denotado pela letra r e assume valores entre -1 e 1. Quando positivo, indica que, ao aumentarmos uma variável, a outra também aumenta. Se negativo, acontece o contrário, isto é, ao aumentar uma, a outra diminui. A correlação será perfeita quando r é igual a -1 ou 1, o que significa que todos os pontos observados estão na reta e, portanto, pertencem à função. (NUÑEZ, 2011)

Nas atividades que regem nosso produto educacional, veremos que *software* de planilhas eletrônicas não só ajusta uma reta aos pontos e estima a função de ajuste, como também calcula o coeficiente de correlação do gráfico. Pearson (1930) comenta sobre a importância dessa medida, afirmando que:

> Até 1889 homens da ciência tinham pensado apenas em termos de causalidade, no futuro eles admitiram outra categoria de trabalho, a da correlação, abrindo-se, assim, a análise quantitativa em áreas amplas da pesquisa médica, psicológica e sociológica.[17] (PEARSON, 1930, p.1, tradução nossa)

Paralelo à correlação, os estudos de Galton sobre a hereditariedade o levaram à criação de outra medida importante, a Regressão.

Antes de estudar os dados dos pais e filhos, Galton fez um estudo semelhante de hereditariedade com *sementes de plantas mães e filhas*. Em 1800, Galton plantou sementes de ervilhas de sete diâmetros diferentes e calculou o diâmetro das sementes de gerações seguintes. Ele notou que as sementes de ervilha menores tiveram descendentes pouco maiores, enquanto que as sementes maiores tiveram prole de tamanho menor. A conclusão notória é que as sementes *regrediam à média*. Ele "chamou este fenômeno estatístico de 'regressão', um termo que é agora utilizado para descrever o próprio procedimento de estimativa de mínimos quadrados[18]" (SMITH, 1997, s/p, tradução nossa).

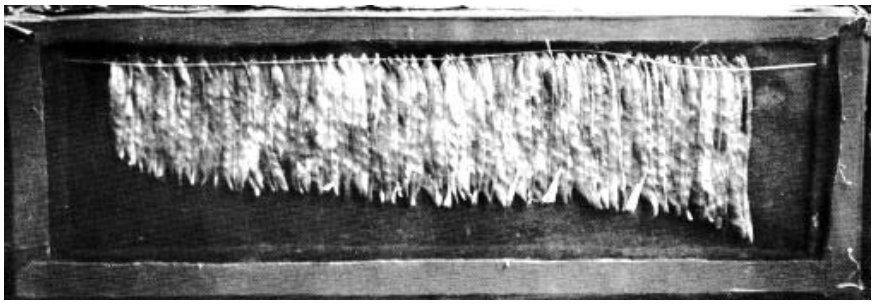
Na figura 15 a seguir, podemos ver as vagens usadas por Galton para o seu experimento. Em alguns livros de História da Estatística, o experimento de Galton é citado como tendo sido realizado com sementes de feijão. Há outros materiais, porém, que tratam como sementes de ervilhas. No entanto, a importância aqui não está no tipo de semente usada pelo matemático, mas sim, no experimento realizado.

---

[17]Up to 1889 men of Science had thought only in terms of causation, in future they were to admit another working category, that of correlation, and thus open to quantitative analysis wide fields of medical, psychological and sociological research. (PEARSON, 1930, p.1)

[18]affixed the label 'regression' to this statistical phenomenon, a label that is now used to describe the least squares estimation procedure itself. (SMITH, 1997, s/p)

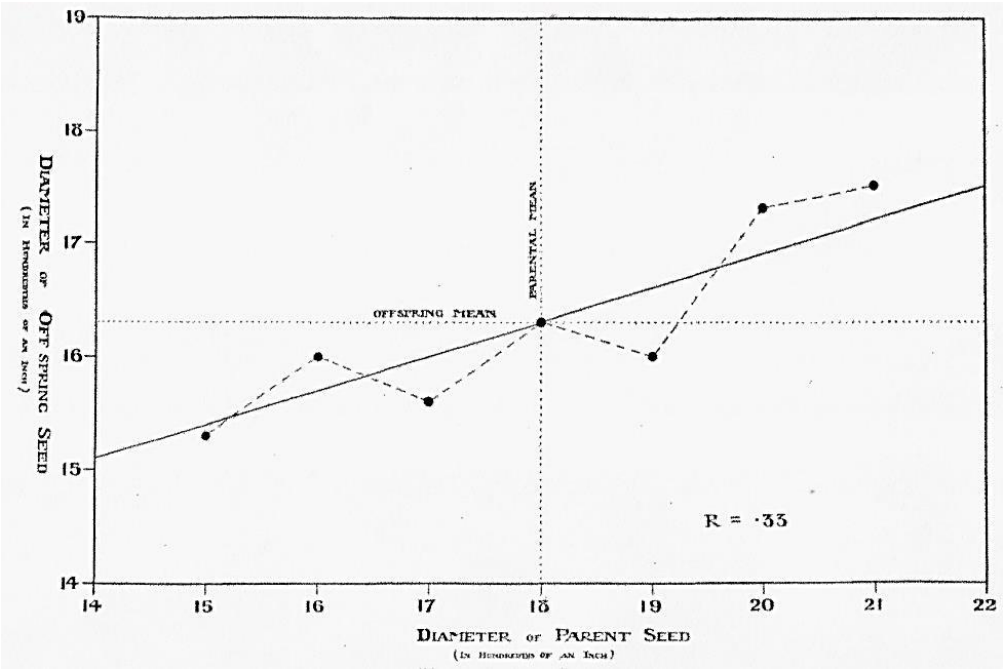
Figura 15 – A experiência de medições de vagens de Galton



Fonte: Pearson (1930, p.34).

Na figura 16 vemos a primeira linha de regressão de Galton. O eixo horizontal do gráfico corresponde aos diâmetros das sementes-mães e o eixo vertical, por sua vez, corresponde aos diâmetros das sementes descendentes.

Figura 16 – Primeira linha de regressão construída por Galton ao observar o crescimento de sementes. A relação obtida foi do diâmetro das sementes dos ascendentes com o diâmetro das sementes descendentes.



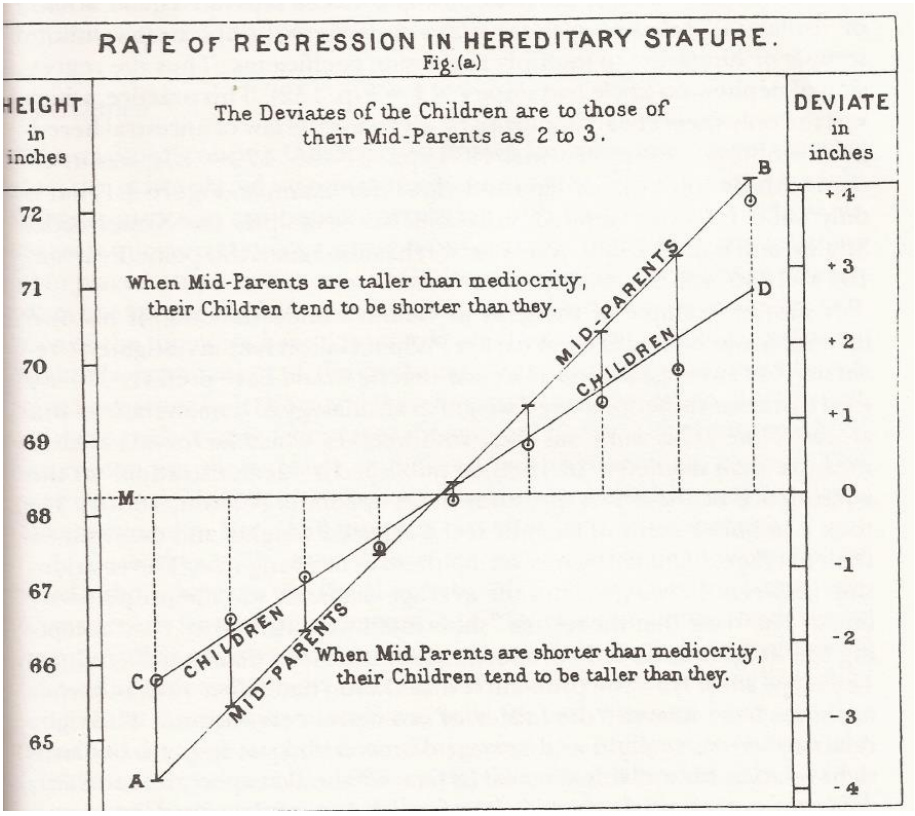
Fonte: Pearson (1930, p.4).

Como resultado destas pesquisas, em 1885, Galton escreveu um artigo intitulado *Regressão em direção à Média na Estatura Hereditária*, publicado no *Journal of the Anthropological Institute*.

As atividades históricas propostas nesta dissertação não fizeram uso do experimento das vagens. Isso porque não dispomos de um espaço físico adequado tampouco do tempo necessário para a germinação. Além disso, o tratamento de sementes requer um clima e terra propícios e uma quantidade ideal de irrigação diária. Por todos estes motivos, usamos apenas os experimentos de Galton com os pais e filhos humanos, onde o matemático notou o mesmo efeito que obteve com o experimento das sementes.

Na figura 17 a seguir podemos ver o gráfico original construído por Galton, em 1885, para representar seu estudo sobre a estatura de pais e filhos.

Figura 17 – Linha de regressão construída por Galton ao observar a estatura de pais e filhos



Fonte: Stigler (1986, p.295).

Nesta figura, os pontos representados por círculos indicam os valores das alturas dos filhos e podem ser lidos na linha CD. A linha AB, com traços,

representa a altura dos pais. Há, ainda, uma linha horizontal no centro do gráfico, indicando a média das alturas. No lado direito, os valores indicam os desvios, em polegadas. No lado esquerdo, têm-se as medidas das alturas, também em polegadas. No gráfico, pode-se perceber que quando os pais são mais altos do que a média, os filhos tendem a ser menores do que eles e, quando os pais são mais baixos que a média, os filhos tendem a ser maiores do que eles (MEMÓRIA, 2004). Ou seja, as alturas dos pais e dos filhos *Regridem a Média*. Caso isso não acontecesse, a humanidade iria acabar fora de controle, pois:

> suponha que os filhos de pais altos tivessem, em média, a mesma altura dos pais. Como as alturas variam, alguns filhos seriam mais altos. Agora imagine a geração seguinte e suponha que os filhos dos filhos mais altos, netos da geração original, também fossem, em média, tão altos quanto os pais. Dessa forma, com o passar das gerações, os seres humanos mais altos seriam cada vez mais altos. Devido à regressão à média, isso não acontece. (MLODINOW, 2009, p.173)

E foi neste estudo que Galton usou pela primeira vez o termo Regressão Linear.

"A diferença entre a linha CD (desenhada a olho para aproximar os círculos) e AB representa a regressão em direção à média" (STIGLER, 1986, p.295)[19]. Sobre este estudo, Smith (1997) comenta que:

> Galton conseguiu registros familiares que continham as alturas de 205 pares de pais e seus 928 filhos adultos. Porque o homem médio é cerca de 8 por cento mais alto do que a média do sexo feminino, ele multiplicou as alturas do sexo feminino por 1,08 a torná-las comparáveis às alturas do sexo masculino. [...] A *imagem 2* mostra que mais uma vez ele encontrou a regressão para a média. A inclinação de 0,69 da linha de mínimos quadrados indica que os pais cujas alturas são de 1 polegada acima (ou abaixo) da média tendem a ter filhos cujas alturas são 0,69 polegada acima (ou abaixo) da média.[20] (SMITH, 1997, s/p, tradução e grifo nosso)

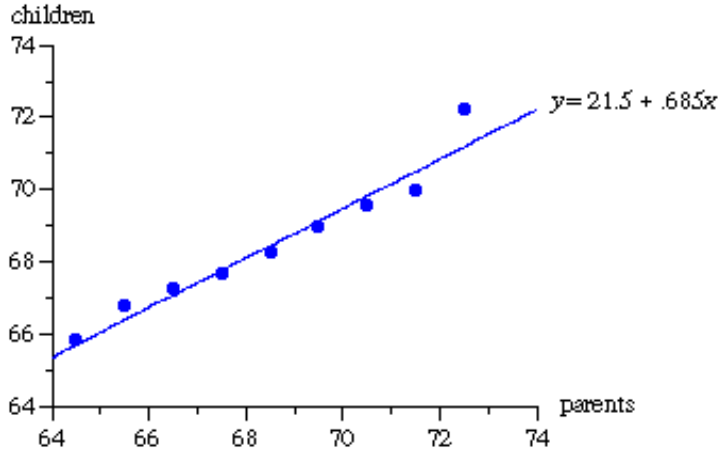
---

[19]The difference between the line CD (drawn by eye to approximate the circles) and AB represents regression toward mediocrity. (STIGLER, 1986, p.295)

[20]Galton purchased family records that contained the heights of 205 pairs of parents and their 928 adult children. Because the average male is about 8 percent taller than the average female, he multiplied the female heights by 1.08 to make them comparable to

A imagem 2 referenciada na citação anterior encontra-se na figura 18 a seguir.

Figura 18 – Dados de Galton das alturas de pais e filhos



Fonte: Smith (1997, s/p).

Se compararmos a figura 18 com a figura 17, que mostra o gráfico original de Galton, podemos perceber que os eixos *x* e *y*, referentes às alturas dos pais e filhos, respectivamente, são mostrados em um único eixo à esquerda do gráfico original de Galton. É importante ressaltar que a reta mostrada na figura 18 não representa a reta da média mostrada na figura 17. A reta, aqui, diz respeito a função que melhor se ajustou ao conjunto de pontos conhecidos do plano cartesiano.

Em nossas atividades, destinamos um momento (ver apêndice *D*, questão 10) para os alunos compararem os dois gráficos e estabelecerem as semelhanças e diferenças entre eles. Embora os dois tratem do mesmo assunto e mostrem os mesmos resultados, são representados de modos diferentes e podem facilmente confundir o leitor.

---

the male heights. [...] Figure 2 shows that again he found regression toward the mean. The .69 slope of the least squares line indicates that parents whose heights are 1 inch above (or below) average tend to have children whose heights are .69 inch above (or below) average. (SMITH, 1997, s/p)

Galton conseguiu obter os coeficientes de regressão por meio de cálculos brutos baseados em seus gráficos. Stigler (1986) afirma que o trabalho de Galton é rico em estimativas informalmente derivadas. Fazer os desvios das alturas em relação à média ao invés de usar o MMQ foi motivado pela facilidade e entendimento de Galton com estes cálculos. O estatístico usou quatro métodos distintos para estimar os parâmetros de regressão e como os quatro deram respostas distintas, ele calculou a média desses valores. Nenhum dos métodos usados foi o melhor método teoricamente possível. (EDGEWORTH, 1889 apud STIGLER, 1986).

Tais dificuldades encontradas por Galton para o cálculo de suas medidas e as estratégias utilizadas por ele para facilitar seu trabalho e compreensão retomam a ideia de Miguel (1993) de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada, mas sim uma criação humana, que passa por erros e dificuldades e leva, por vezes, décadas até estar totalmente correta. A relação do MMQ com a criação da Regressão, por Galton, também permite constatarmos outra citação de Miguel (1993), a de que as percepções dos matemáticos mudam e se desenvolvem ao longo do tempo. O MMQ foi publicado pela primeira vez em 1805, a Regressão Linear foi criada em 1875, mas a ligação entre estes dois conceitos não foi percebida tão facilmente.

Os estudos de regressão e correlação não pararam em Galton, sendo estudados, desenvolvidos e aperfeiçoados por muitos outros matemáticos e estatísticos da época. Foi apenas no século seguinte à criação de Galton, em meados de 1923, que “o primeiro reconhecimento ostensivo de que um modelo linear analisado pelo Método dos Mínimos Quadrados era mais fundamental de que uma análise intuitiva baseada nos desdobramentos da soma dos quadrados” (MEMÓRIA, 2004, p.50). Desvendou-se tal fato, ao matemático britânico, Frank Yates (1902 – 1994). Mesmo com este aperfeiçoamento

> É justo dizer que em 1889 Francis Galton tinha uma clara compreensão do conceito de regressão. [...] Questões como a melhor forma de estimar os coeficientes do problema, o coeficiente de correlação e os parâmetros da distribuição normal bivariada, serão abordadas mais tarde por Francis Edgeworth e Karl Pearson, mas a compreensão dos conceitos de Galton foi

> tão forte quanto qualquer um provavelmente encontraria hoje. (STIGLER, 1999, p.183, tradução nossa)[21]

Foi graças à criação de Galton e aos matemáticos posteriores que aperfeiçoaram o processo, inserindo o MMQ, que a Regressão "virou um componente básico dos livros didáticos. Podemos afirmar que sua matemática é bem compreendida pelos estatísticos matemáticos"[22] (STIGLER, 1999, p.184-185, tradução nossa).

Uma vez que o MMQ está intimamente ligado ao nível superior, pois trabalha com derivadas e/ou integrais, construiremos nossas atividades históricas utilizando somente os conceitos de Regressão Linear, vistos neste capítulo. Aos professores que ministram disciplinas como Cálculo Integral e Diferencial, é possível que abordem em suas aulas, a história de Legendre e da criação e demonstração do Método dos Mínimos Quadrados. Dessa forma, poderão motivar os alunos ao estudo das derivadas e integrais, mostrando sua importância e aplicação ao longo da História, como Miguel (1993); Fossa, Mendes e Valdés (2006); dentre outros autores sugerem.

Atendendo a um dos nossos objetivos de construir um produto educacional constituído de um caderno de atividades históricas para abordar os conceitos de Estatística Básica e Funções Afim, segue o sexto capítulo desta dissertação, com a descrição detalhada de como elaborar uma atividade histórica e a apresentação de nossa proposta.

---

[21]It is fair to say that by 1889 Francis Galton had a clear understanding of the concepto of regression. [...] Questions about how to best estimate the coefficients of the problem, the correlation coefficient and the parameters of the bivariate normal distribution, would be addressed later by Francis Edgeworth and Karl Pearson, but Galton's grasp of the concepts was as firm as any one is likely to encounter even today. (STIGLER, 1999, p.183)

[22]was a staple of textbooks. Its mathematics could be said to be well understood by mathematical statisticians. (STIGLER, 1999, p.184-185)

6 ATIVIDADES HISTÓRICAS BASEADAS NOS ESTUDOS DE GALTON E EXECUTADAS COM O APOIO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS

Para Miguel; et al (2009, p.107), atividades históricas são “atividades que utilizam a história para o ensino da Matemática”. Contudo, precisamos ter certo cuidado no entendimento dessa afirmação. Não julgamos produtivo usar a *história pela história*, isto é, simplesmente contar aos alunos um fato histórico ou fazer uma referência histórica em um material didático. Buscamos usar a HM como uma *história-significado* ou uma *história-reflexiva* apontada por Fossa, Mendes e Valdés (2006) como sendo

> uma história cuja finalidade é dar significado ao tópico matemático estudado pelos alunos, levando-os a refletir amplamente sobre tais informações históricas de modo a estabelecer conexões entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática presente nessa história. (FOSSA; MENDES; VALDÉS, 2006, p.97)

Dessa forma, inserimos em nossas atividades históricas uma perspectiva investigatória, com o intuito de gerar conhecimento matemático escolar e, por consequência, melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática. Para que isso seja possível, na visão de Miguel; et al (2009), é necessário fazermos adaptações nas informações históricas coletadas, de acordo com nossas necessidades. Tais adaptações visam o melhor uso da HM na sala de aula.

Partindo, portanto, dessa linha de pensamento, esclarecemos no tópico a seguir como podemos elaborar uma atividade histórica.

6.1 COMO ELABORAR UMA ATIVIDADE HISTÓRICA

Antes de iniciarmos uma pesquisa bibliográfica de fatos históricos na Matemática, devemos definir qual ou quais conceitos matemáticos serão abordados nas atividades a serem construídas. Feito isso, para que possamos efetivar um ensino e aprendizagem significativo em Matemática, devemos buscar no material histórico pesquisado, “todas as informações úteis à condução da nossa ação docente e, somente a partir daí, orientar os estudantes à realização de atividades” (MENDES, 2009, p.94). Estas informações vão desde

a origem e utilidade prática de um conceito matemático até o contexto histórico, social, cultural e científico da época que culminou na necessidade da criação e desenvolvimento de tal conceito. Tais informações permitem saciar o interesse dos discentes em saber por que e para que aprendem determinados conceitos.

Fossa, Mendes e Valdés (2006, p.81) afirmam que a história é "uma tentativa de responder as perguntas acerca do processo de construção das informações apresentadas no presente". Desse modo, é importante que, ao selecionarmos os fatos históricos, estejamos sempre relacionando-os com o momento atual e principalmente com o cotidiano dos alunos. Esta ação pode promover uma maior motivação para o processo de ensino e de aprendizagem, visto que

> O aspecto motivador de um problema não reside no fato de ser ele 'histórico' nem de ser um 'problema', mas no maior ou menor grau de desafio que oferece ao estudante, no modo como esse desafio é por ele percebido, no tipo de relações que se estabelecem entre o problema histórico e os valores, interesses e vivência do estudante, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2008, p.51)

Com isso, queremos estabelecer conexões entre a história estudada e o cotidiano dos alunos. Ao construir uma atividade histórica, estamos propondo "uma abordagem histórica que provoque no aluno uma reformulação da problematização histórica para o momento atual, considerando o contexto em que ele está inserido" (FOSSA; MENDES; VALDÉS, 2006, p.97).

Além disso, o docente precisa estar consciente das adaptações que deverá fazer ao usar os fatos históricos buscados dentro e fora da sala de aula. O professor não deve pensar que todo fato histórico pode ser usado tal como foi encontrado. As informações históricas, quando usadas nas atividades de Matemática, necessitam passar por adaptações pedagógicas de modo que possuam "uma carga muito forte de aspectos *provocadores da criatividade imaginativa* dos estudantes, bem como de fortes indícios dos aspectos *socioculturais* que geraram a construção dos tópicos matemáticos" (MIGUEL; et al, 2009, p.109).

Um exemplo das adaptações comentadas por Miguel; et al (2009) se dá no nosso produto educacional quando reduzimos o tempo das (re)criações ao usar as TIC como apoio. Além disso, os experimentos de Galton não foram

recriados tal como na época, usando as medidas dos pais e dos filhos, mas sim, muitas vezes, dos avós, tios ou outros parentes. A fim de substituir os instrumentos usados por Galton para medir as capacidades mentais dos indivíduos, usamos um jogo de raciocínio lógico e medimos o tempo de respostas dos alunos e seus parentes. Outras adaptações ocorreram nos próprios conceitos, quando omitimos o MMQ para focar apenas no estudo dos gráficos e das Funções Afim.

Uma vez que o objetivo das atividades propostas neste trabalho é que o aluno seja capaz de identificar e estudar o comportamento de uma função polinomial do primeiro grau, bem como seu gráfico (reta) e coeficientes; não mencionamos o MMQ nas questões que tangem as atividades, visto que teríamos que tratar de conteúdos não condizentes ao Ensino Médio (integral). Isso não diminui a importância do método que se expandiu na Estatística e hoje é usado para as estimativas dos parâmetros de regressão (*a* e *b*). Além disso, não há prejuízo com essa adaptação, pois as somas infinitas da integral são realizadas pelo *software* e podemos lançar mão disto para explorar outros aspectos do conceito de Função Afim e suas propriedades.

Por outro lado, a provocação da criatividade se dá, por exemplo, quando os alunos são levados ao laboratório de informática para construir os mesmos gráficos que anteriormente foram feitos à mão. O programa computacional permite que eles realcem e mudem as cores dos pontos, dos eixos, destaquem informações que julgarem relevantes, além de fazer novas estimativas em frações de segundos.

Quanto aos aspectos socioculturais, também fizemos adaptações nas atividades. As famílias da sociedade atual não possuem a mesma configuração da época do experimento de Galton. Naquela época, predominava uma família constituída de pai, mãe e filhos. Atualmente, há uma diversidade de culturas e valores, onde nem todos os jovens moram ou conhecem seu pai e/ou sua mãe. Eles vivem com seus avós, tios, outros parentes ou até mesmo são adotados. Foi o caso de uma aluna da turma que é adotada e fez a coleta de dados com o vizinho. Outra aluna que não morava com seu pai, realizou o experimento com o seu primo.

Visto que nosso objetivo é uma história que promova a aprendizagem “a partir das experiências e reflexões dos próprios estudantes” (MIGUEL; et al,

2009, p.109), incluímos nas atividades históricas a Investigação Matemática. Quando atrelada a HM, a IM permitirá que *o aluno (re)crie experimentos matemáticos realizados na época; possivelmente reflita tal como o matemático estudado;* e *chegue a resultados* tal como o matemático chegou, porém, em uma *quantidade de tempo menor*. Essa redução do tempo da (re)criação histórico-matemática pelo estudante será possível por meio do uso das TIC, também objeto importante de estudo e auxílio nas atividades históricas.

Enfatizamos que

> Esse modo de usar a história no ensino de Matemática, pressupõe que o *professor não deve* pedir que os alunos refaçam os principais passos do descobrimento (construção) de um conceito matemático de acordo com a formulação da época em que o referido conceito foi construído, pois esse é *um modo estático de trazer a história para a sala de aula*, podendo, até, gerar maiores problemas em vez de resolver os que já existem. O *professor deve*, portanto, *utilizar a história de um modo mais aliado às condições reais* em que os estudantes se encontram, ou seja, a partir da *incorporação* dos aspectos socioculturais pelos quais os estudantes compreendem e explicam a sua realidade. Além disso, *pode lançar mão de outros instrumentos* de aprendizagem que enfatizem no processo de construção histórica, uma dinâmica cultural existente no conhecimento matemático construído. (MIGUEL; et al, 2009, p.112, grifo nosso)

Escolhemos como instrumento de aprendizagem supracitado as TIC, particularmente as planilhas eletrônicas. Uma vez que as atividades históricas serão permeadas pela IM, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) defendem o uso das tecnologias neste processo e chamam a atenção, também, para a possibilidade do docente trabalhar de forma interdisciplinar, uma vez que permite estudar situações variadas com facilidade.

Em suma, criar uma atividade história, fonte de geração do conhecimento matemático, implica em:

i. Escolher o conceito matemático a ser ensinado;

ii. Coletar informações históricas acerca não apenas da necessidade que levou à criação de tal conceito matemático, mas também todo o contexto social, histórico, econômico, artísticos, etc., que permearam a época da criação,

reconhecendo, assim, uma situação problema, visto por Ponte, Brocado e Oliveira (2013) como a primeira etapa da Investigação Matemática;

iii. Usar as informações históricas não como um conto, mas sim como um processo de recriação investigativo dos acontecimentos que levaram as conclusões, fórmulas e/ou conceitos matemáticos, relacionando-as, sempre que possível, com o contexto atual dos estudantes;

iv. Usar as TIC para reduzir o tempo das (re)criações, além de servir como ferramentas de auxílio na investigação, reflexão e comparação do que foi encontrado pelos estudantes e os resultados históricos conhecidos, ações estas que conduzem às últimas etapas da investigação.

Assim, tentando atender a esses objetivos e traçar os passos citados, construímos nosso produto educacional, descrito passo a passo em dois cronogramas, no tópico a seguir, e anexado a este trabalho nos apêndices D (atividade 1) e E (atividade 2).

6.2 O PRODUTO EDUCACIONAL PROPOSTO

Já vimos a importância da Estatística e das Funções Afim para a vida acadêmica e cotidiana dos alunos. Pela forte ligação entre estes tópicos, e por entendermos que a Função Afim é o primeiro tipo de função que o estudante tem contato no Ensino Médio e sua compreensão será um facilitador para o processo de aprendizagem dos demais tipos de funções, as atividades foram pensadas para os estudantes da primeira série do Ensino Médio.

Embora o MMQ e a RL não estejam presentes no currículo escolar, é possível adaptá-los para a Educação Básica. A história que envolve esses conceitos mostra problemas com Estatística e Função Afim que podem ser explorados na atualidade em um processo de uso da HM via TIC e IM. Além disso, possui aplicação prática o que favorece o processo de ensino e da aprendizagem da Matemática, visto que “a aprendizagem de Estatística *fazendo Estatística* é a chave da motivação” (CAMPOS; WODEWOTZKI; JACOBINI, 2013, p.15, grifo dos autores).

Desse modo, o produto educacional proposto é um caderno de atividades históricas e investigativas pautados na RL, abordando os conceitos de Função

Afim e noções básicas de Estatística, usando um *software* de planilhas eletrônicas.

É importante salientar que os fatos históricos escolhidos não tratam da origem, criação e desenvolvimento da Função Afim e da Estatística, mas da Regressão Linear. É a partir dessa história que abordaremos os conceitos matemáticos não exclusivamente para ensiná-los, mas sim para dar mais significado e importância a estes conceitos, contextualizando-os em diferentes épocas da nossa história.

De modo geral, na primeira atividade, propomos, inicialmente, que os alunos, com o auxílio do professor, tomem ciência da vida e da obra de Francis Galton (1822-1911), desde o seu nascimento até a criação da Eugenia e da Regressão Linear. Ao longo da exposição desses fatos históricos, os alunos também realizam pesquisas dos significados de palavras por eles desconhecidas, refletem sobre os acontecimentos históricos e comparam com os dias atuais. Essa etapa pode ser realizada por meio de uma discussão com os alunos, lendo a biografia de Galton com a turma ou em grupos menores; ou ainda, em uma apresentação de slides.

Após conhecerem os experimentos realizados por Galton para comprovar sua teoria da seleção artificial e de como ele chegou à Regressão Linear, os alunos refazem tais experimentos, adaptando-os à realidade atual. O experimento das sementes, por exemplo, é inviável devido ao tempo de germinação e geração de uma semente, além do clima e espaço que devem ser totalmente favoráveis para o seu crescimento, como já mencionamos anteriormente. Assim, escolhemos as medições realizadas em pais e filhos para recriar o gráfico de dispersão de Galton.

Os alunos coletam os seus dados e dos seus parentes e constroem, manualmente, os gráficos com os dados da turma. Após as construções, ajustam os pontos em uma reta e, por meio dos conhecimentos de Função Afim, estimam os valores dos coeficientes linear e angular da função de ajuste.

O procedimento de construção do gráfico é repetido em um *software* de planilhas eletrônicas, utilizando, para isso, os mesmos dados. O ajuste da reta e a estimativa da função são realizados pelo próprio programa.

Os estudantes comparam as duas construções (a manual e a realizada no programa) e analisam cada resultado encontrado, concluindo se Galton tinha ou não razão em suas teorias eugênicas.

Optamos por construções primeiramente manuais e, posteriormente, usando os recursos tecnológicos, por acreditarmos que dessa maneira, a partir de uma comparação (de semelhanças e diferenças) dos resultados manuais com os gerados pela tecnologia, os alunos possam melhor analisar e concluir.

A segunda atividade proposta usa os momentos históricos vistos anteriormente. Tais informações são aplicadas a um problema do cotidiano dos alunos: a relação das medidas do corpo humano com os tamanhos de roupas, calçados e acessórios. Nesta atividade, o conceito de função é mais abrangente, sendo abordadas, também, as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras; o domínio e a imagem de uma função; dentre outros subtópicos matemáticos.

Todos os passos de ambas atividades e as conclusões de cada aluno foram registrados em relatórios por eles elaborados e entregues como parte da avaliação. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam que este tipo de atividade é extremamente rica e importante. Ela não só habitua o aluno a escrever respostas mais textuais em Matemática, como também possibilita a releitura e utilização em momentos de retomada do assunto estudado. Veremos no tópico 7.3 como estes relatórios foram feitos e quais resultados obtivemos.

Dividimos as duas atividades propostas em encontros presenciais. Propomos que cada encontro seja realizado em um único dia, sendo este composto por três aulas de quarenta e cinco minutos cada. A tabela 3 a seguir mostra um quadro com descrições detalhadas de cada encontro referentes a primeira atividade.

Sabemos que a quantidade semanal de aulas de Matemática, bem como o tempo (em minutos) de uma aula, varia de acordo com a instituição e a região do país. Desse modo, o professor pode adaptar o cronograma de forma a se adequar à realidade a qual aplicará a atividade. Na nossa aplicação, por exemplo, havia um total de quatro aulas semanais, divididas em duas aulas por dia. Cada aula tinha duração de quarenta e cinco minutos.

Os alunos realizaram o primeiro e o terceiro encontros da atividade 1 em quatro aulas (dois dias distintos). Cada encontro, em duas aulas, seria inviável.

Percebemos que os alunos ficaram um pouco dispersos e cansados com a leitura que, em alguns momentos, consistia numa linguagem mais técnica e voltada para a Matemática. Assim, posteriormente à aplicação, dividimos o primeiro encontro em dois momentos de dias distintos.

Tabela 3 – Cronograma da atividade 1

Encontro:	Atividade realizada:	Local:
1º encontro	Estudo da vida e obra de Francis Galton (1822-1911), bem como apresentação/introdução da proposta da atividade de recriação do experimento sobre Eugenia (1875).	Laboratório de informática
2º Encontro	Atividades de pesquisa na internet sobre os estudos de Galton acerca da Regressão Linear. Encaminhamento de atividade extraclasse de coleta de dados realizada pelos alunos.	Laboratório de informática
3º encontro	Retomada e reunião dos dados coletados na atividade encaminhada no encontro anterior; Representação dos dados em um plano cartesiano (um para cada tipo de dado) em papel quadriculado; Ajuste de pontos em uma reta; Investigação da melhor função que representa a reta traçada; Fazer previsões com a função estimada.	Sala de aula com projeção
4º encontro	Inserir os dados coletados em um *software* de planilhas eletrônicas; Construir, no *software,* um gráfico de dispersão para cada conjunto de dados coletados; Verificar a função que o *software* fornece ao gráfico, comparando-a com a estimada manualmente, no encontro anterior; Fazer previsões com a nova função; Analisar os resultados criticamente, concluindo se Galton estava correto em sua teoria.	Laboratório de informática
5º encontro	Elaboração de um relatório contendo todo o procedimento realizado na atividade de recriação do encontro histórico (experimento de Galton); Socialização e discussão dos resultados obtidos com a turma; Análises e conclusões.	Sala de aula com projeção

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Alguns alunos não tinham visto o assunto de Função Afim no nono ano. Os que estudaram este assunto, não tinham recordações satisfatórias. Assim, vimos necessidade de reservar um dia (duas aulas de 45 minutos cada uma) para explorar, de forma teórica, os conceitos de Função Afim e seus gráficos no

plano cartesiano, coeficientes angular e linear e coeficientes numéricos dependentes e independentes. Este conhecimento era fundamental para que os alunos pudessem responder às questões propostas e dar continuidade à atividade.

Por detectarmos esta necessidade apenas no decorrer da atividade, reservamos o dia da aula teórica logo após o primeiro encontro. Contudo, nossa sugestão é que o professor que aplique nossas atividades faça esta aula teórica antes da aplicação.

No quadro da tabela 4 a seguir, se encontra o cronograma da segunda atividade realizada.

Tabela 4 – Cronograma da atividade 2

Encontro:	Atividade realizada:	Local:
1º encontro	Pesquisa de como o experimento de Galton ainda está presente nos dias atuais; Formação dos grupos e escolha das novas variáveis (medidas do corpo humano e tamanho de roupas, calçados e acessórios) a estudar/trabalhar; Coleta de dados das variáveis escolhidas.	Sala de aula com projeção e som
2º encontro	Análise dos dados coletados.	Sala de aula
3º encontro	Representação dos dados em um gráfico de dispersão com recurso tecnológico; Estimativa da função; Previsões com a função estimada.	Laboratório de informática
4º encontro	Entrega de relatórios; Socialização e discussão dos resultados obtidos de cada grupo.	Sala de aula com projeção

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Nos cronogramas apresentados anteriormente inserimos momentos de IM aliados ao uso de HM, a saber, a coleta, organização e análise dos dados para posteriores conclusões e elaboração de relatórios a serem apresentados. Estas ações possibilitam a reflexão crítica sobre o assunto matemático estudado e a troca de saberes entre os grupos socializados.

Na segunda atividade, objetivamos uma conexão da HM com o cotidiano dos alunos, propondo que façam um estudo antropométrico de suas próprias medidas, além de expormos uma reportagem de um noticiário do canal aberto

de televisão (ver link no apêndice E com a segunda atividade) que trata da importância desse estudo para a população e como isso afeta as pessoas.

Os recursos necessários para a execução do projeto são: papel quadriculado (diferentemente do milimetrado, em que as divisões são menores, o papel quadriculado tem um custo menor e por isso a especificação), lápis, régua, computador com internet (podendo usar também o celular para as pesquisas em sites de busca), fita métrica, balança, projetor multimídia e caixas de som (opcional).

Nos apêndices D e E desta dissertação encontram-se as atividades propostas na íntegra, da forma como foram repassadas aos alunos durante a aplicação que relataremos no próximo capítulo. Nas duas atividades propostas, há um espaço de dicas e sugestões aos professores que as adotarão em suas aulas, de modo a melhor orientá-los.

A seguir, no capítulo 7, veremos como estas atividades foram aplicadas, bem como os conteúdos abordados (no que tange a Função Afim e a Estatística) e seus resultados.

7 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES: APRESENTAÇÃO, REFLEXÕES E ANÁLISES

Os assuntos sobre funções são normalmente estudados na primeira série do Ensino Médio e, por este motivo, foram os estudantes deste período que fizeram parte do nosso público alvo.

O tratamento quantitativo e qualitativo nos dados coletados e analisados objetivou responder questões como: *As atividades aplicadas geraram conhecimento de Função Afim e Estatística? As atividades motivaram o aluno da forma como os teóricos afirmam que o uso da HM é capaz de fazer? As tecnologias facilitaram o processo investigativo e otimizaram o tempo gasto para as conclusões, sobretudo, das potencialidades da HM?*

Tais questionamentos serão respondidos à medida que descreveremos as aplicações de cada atividade proposta e transcreveremos as falas de alguns alunos em conversas informais, na sala de aula, registrados nos diários de campo.

Como já posto introdutoriamente, trata-se de uma pesquisa de natureza predominantemente qualitativa com alguns aspectos quantitativos. Dito isso, optamos pela realização de uma pesquisa-ação, uma vez que além da aplicação das atividades serem na turma em que a pesquisadora leciona, como também já mencionado, esse tipo de pesquisa se caracteriza pelo objetivo de provocar mudanças educacionais.

Escolhemos como aplicação das atividades a primeira série do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), localizado na Avenida Senador Salgado Filho, 1559, Tirol, Natal/RN (Campus Natal-Central), onde, como já dito, a pesquisadora dessa dissertação atua como docente.

A seguir, descreveremos um pouco a estrutura do campus e o perfil dos alunos pesquisados.

7.1 O PÚBLICO E O ESPAÇO

Para ingressar no IFRN como aluno do Ensino Médio, é necessário que o estudante tenha terminado (ou esteja terminando) o Ensino Fundamental e seja

aprovado em um processo seletivo com 20 questões objetivas de Português, 20 questões objetivas de Matemática e uma Redação. Cinquenta por cento das vagas são destinadas aos alunos provenientes de escola pública e as demais preenchidas por rede privada de ensino. No ato da inscrição para o processo seletivo o aluno precisa escolher entre os cursos ofertados por cada campus do instituto. Em Natal/RN, há três campis: zona norte, centro e zona sul. Embora o campus Natal-Central (zona sul) esteja localizado em um bairro de classe média-alta da cidade de Natal, uma quantidade significativa de alunos deste campus reside na zona norte da cidade e há muitos, também, que moram no interior. Esse fato se dá, muitas vezes, pelo curso escolhido só ser ofertado em um único campus.

Cada diretoria do campus Natal-Central contém um laboratório de informática. Existe, ainda, um laboratório maior com computadores para atender a todos os alunos do campus. O laboratório usado para a aplicação das atividades foi o da Diretoria Acadêmica de Ciências (DIAC), a qual os professores de Matemática pertencem. Na figura 19 a seguir, é possível ver uma parte do espaço do laboratório.

Figura 19 – Laboratório de informática usado na aplicação das atividades

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Neste laboratório existem 32 computadores funcionando normalmente, mas nem todos com acesso a internet por falta de cabo de rede. Alguns também não possuem um *software* de planilhas eletrônicas instalado, porém, não foi um problema, pois tínhamos a opção de fazer as atividades pelo *software on-line*.

Uma vez que a pesquisadora deste trabalho só lecionava em uma única turma de primeira série (primeiro ano) no ano da aplicação das atividades (2015), não foi preciso estabelecer critérios para a escolha da turma. Assim, participaram desta pesquisa os alunos do primeiro ano do Técnico Integrado em Edificações, turno vespertino.

A turma é composta por 24 mulheres e 17 homens, totalizando 41 alunos. Dentre eles, 21 são provenientes de escola pública e 20 da rede privada. Na tabela 4, podemos visualizar a quantidade de acertos de questões na prova de Matemática desta turma, no exame de ingresso na instituição.

Tabela 5 – Quantidade de acertos de questões de Matemática por origem de escola

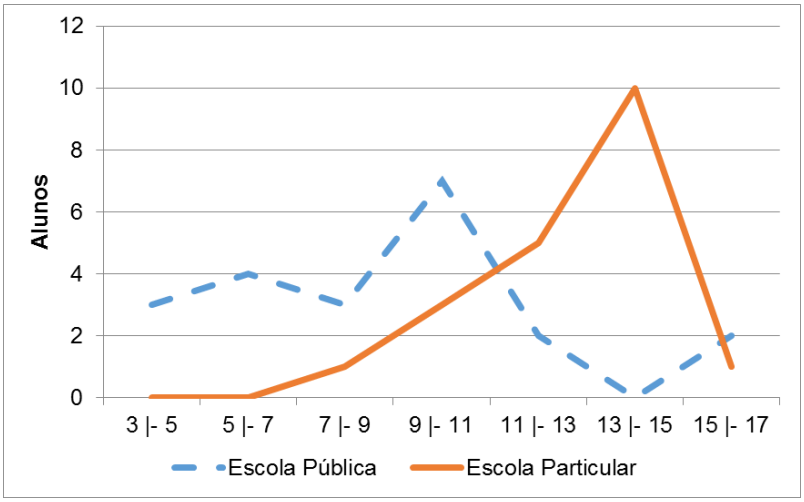
Quantidade	Alunos de escola pública						Alunos de escola particular					
	Alunos	%	F↑	F↑%	F↓	F↓%	Alunos	%	F↑	F↑%	F↓	F↓%
3 |- 5	3	14	21	100	3	14	0	0	20	100	0	0
5 |- 7	4	19	18	85,7	7	33	0	0	20	100	0	0
7 |- 9	3	14	14	66,7	10	48	1	5	20	100	1	5
9 |- 11	7	33	11	52,4	17	81	3	15	19	95	4	20
11 |- 13	2	10	4	19	19	90	5	25	16	80	9	45
13 |- 15	0	0	2	9,52	19	90	10	50	11	55	19	95
15 |- 17	2	10	2	9,52	21	100	1	5	1	5	20	100
Total	21	100	-	-	-	-	20	100	-	-	-	-

Fonte: IFRN (2015).

Na tabela 5 anterior é possível visualizar que apenas quatro alunos provenientes da escola pública obtiveram 11 ou mais acertos na prova de Matemática, enquanto da rede privada, esse total sobe para 16 alunos (do total de 20 questões da prova).

Embora o enfoque não seja criticar ou elogiar nenhuma das duas escolas (pública e privada), podemos concluir que a maior quantidade de questões acertadas foi de alunos que vieram da rede particular de ensino. O gráfico 1 melhor representa esta diferença na mesma prova de seleção para ingresso na instituição. A linha incialmente superior (pontilhada) refere-se às escolas públicas e a linha inicialmente inferior (reta), começando do zero, representa as escolas privadas.

Gráfico 1 – Quantidade de acertos de questões de Matemática por origem de escola



Fonte: IFRN (2015).

Como a correção da prova é baseada na Teoria de Resposta ao Item (TRI)[23], também coletamos dados das pontuações obtidas pelos aprovados. Veja a tabela 6 a seguir.

Tabela 6 – Pontuação atingida em Matemática por origem de escola

Pontuação	Alunos de escola pública						Alunos de escola particular					
	Alunos	%	F↑	F↑%	F↓	F↓%	Alunos	%	F↑	F↑%	F↓	F↓%
16 | - 26	1	5	19	100	1	5	0	0	20	100	0	0
26 |- 36	3	16	18	95	4	21	0	0	20	100	0	0
36 |- 46	4	21	15	79	8	42	0	0	20	100	0	0
46 |- 56	7	37	11	58	15	79	4	20	20	100	4	20
56 |- 66	2	11	4	21	17	89	5	25	16	80	9	45
66 |- 76	0	0	2	11	17	89	5	25	11	55	14	70
76 |- 86	2	11	2	11	19	100	6	30	6	30	20	100
Total	19	100	-	-	-	-	20	100	-	-	-	-

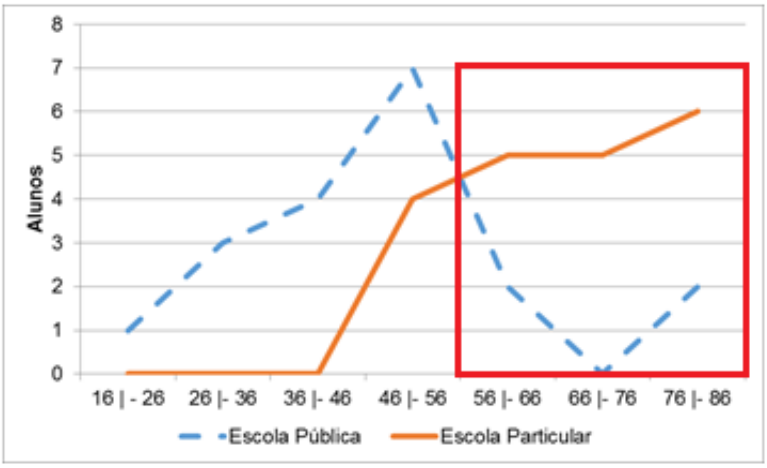
Fonte: IFRN (2015).

Observamos que mais uma vez os alunos da escola da rede privada se sobressaíram. No gráfico 2 a seguir esses resultados são mais evidentes.

---

[23]Trata-se de um estudo matemático que, em processos seletivos, avalia o desempenho de todos os estudantes em cada questão (acertos e erros), classificando-as em fáceis ou difíceis, para só então calcular o desempenho individual de um candidato. Dessa forma, duas pessoas podem ter acertado a mesma quantidade de questões e obter rendimentos distintos. Esse sistema também é usado nas provas do ENEM.

Gráfico 2 – Pontuação atingida em Matemática por origem de escola



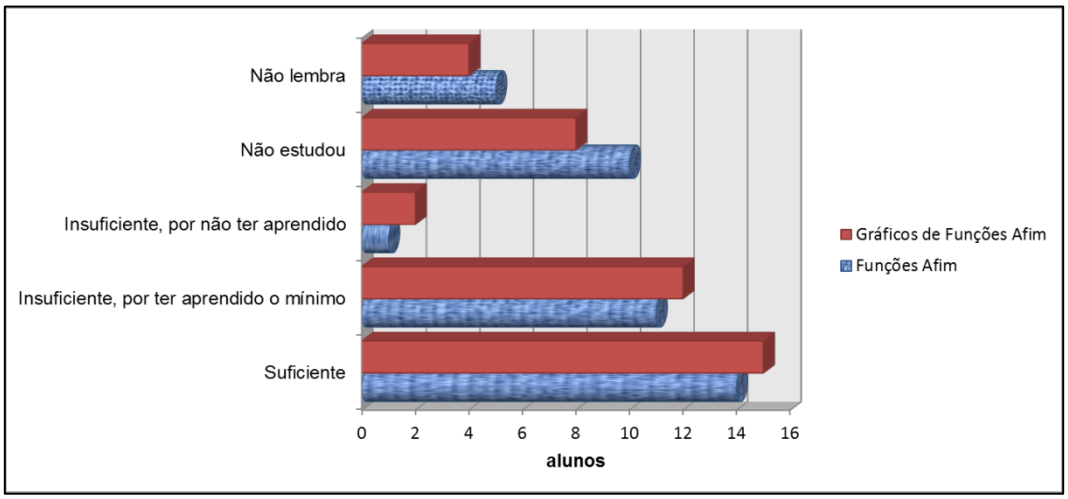
Fonte: IFRN (2015).

A linha azul (pontilhada, que inicia superior à outra) correspondente às escolas públicas, supera a linha laranja (reta, que inicia na parte inferior à outra, começando do zero) apenas nas pontuações menores. A partir de 56 pontos (conforme destacado no retângulo), essa linha sofre uma queda na frequência de alunos, tornando-se inferior à linha da escola particular.

Ao aplicarmos o questionário de sondagem (ver apêndice *A* do questionário inicial aos alunos), mais de 68% da turma (em 2015) estava cursando o primeiro ano do Ensino Médio pela primeira vez. Os demais não conseguiram passar no processo seletivo quando estavam terminando o nono ano do Ensino Fundamental. Refizeram a prova nos anos seguintes, estando regularmente matriculados no Ensino Médio em outra instituição. Ao garantirem a aprovação no IFRN, efetuaram a transferência da escola, tendo que recomeçar na primeira série, independente de estarem na segunda, na terceira série ou concluído o Ensino Médio. Desses alunos que estão cursando pela segunda ou mais vezes este mesmo nível de ensino, 53,8% vieram da escola pública.

A idade proveniente desses alunos são 15 e 16 anos, havendo três alunos com 14 e dois alunos com 17 anos. O gráfico 3 mostra o que eles responderam ao perguntarmos acerca do ensino de Função Afim e gráficos de funções no Ensino Fundamental.

Gráfico 3 – Respostas dos alunos quanto ao nível de aprendizado de Função Afim e de gráficos de Função Afim no Ensino Fundamental



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

As colunas em forma de prisma (cor vermelha) representam as respostas quanto aos gráficos de função. As colunas em formato cilíndrico (cor azul) representam as respostas quanto à Função Afim.

Percebemos certa confusão nas respostas, pois alunos que responderam não ter estudado Função Afim foram os mesmos que responderam ter aprendido o mínimo do gráfico desta função. Didaticamente, os professores de Matemática iniciam o assunto de função com a definição do conceito para posteriormente construir os gráficos referentes às funções. Assim, não seria comum o aluno não ter estudado função, mas ter aprendido sobre o gráfico delas. Mesmo que alguns alunos não soubessem ou não lembrassem o significado de Função Afim, também a denominamos, na mesma pergunta, de Função Polinomial do 1° grau.

Dos quinze alunos que classificaram seu aprendizado em gráficos como suficiente (dos quais onze também deram a mesma classificação para o aprendizado em Função Afim), oito deles deram um exemplo de Função Afim e construíram o gráfico.

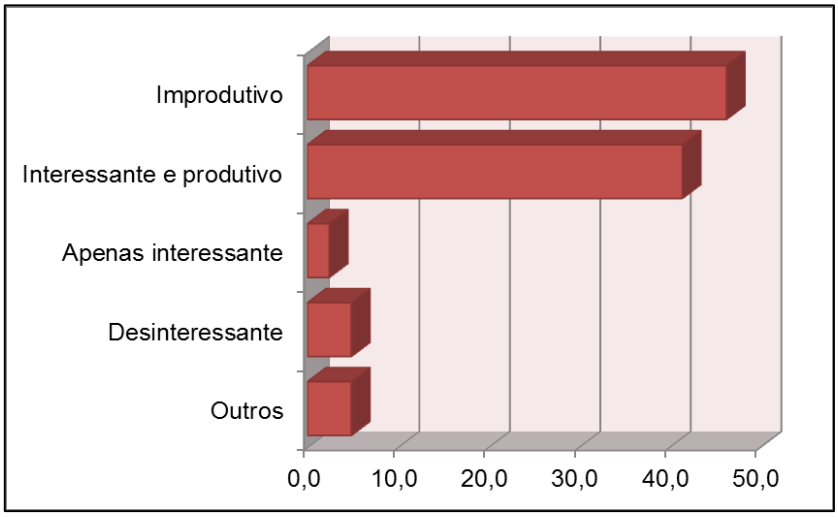
Quando perguntados sobre seus conhecimentos em Estatística, 11 alunos classificaram como suficientes, dos quais 4 responderam que lembram das medidas centrais (média, mediana e moda); 4 se referiram apenas às construções e interpretações de gráficos e tabelas; e 2 citaram probabilidade como um assunto que lembram dentro da Estatística. Contudo, os dados que prevaleceram foram dos alunos que classificaram esses conhecimentos como

insuficientes ou que não lembram ou não estudaram, totalizando 30 alunos (73%).

Em relação ao uso das TIC para ensinar Matemática, 82,9% dos entrevistados julgaram interessante, embora mais da metade deste percentual, não lembra ou nunca usou computadores para este fim.

Outro percentual que nos chamou a atenção foi a opinião dos alunos quanto ao uso da HM para o ensino de Matemática. Os resultados são destacados no gráfico 4 a seguir. Dos alunos que não acham a HM interessante, cinco deles responderam que ela é desnecessária e que *só serve para contar o que fez o homem necessitar daquilo*. Tentamos mostrar na aplicação de nossas atividades que a HM serve para muito mais que isso.

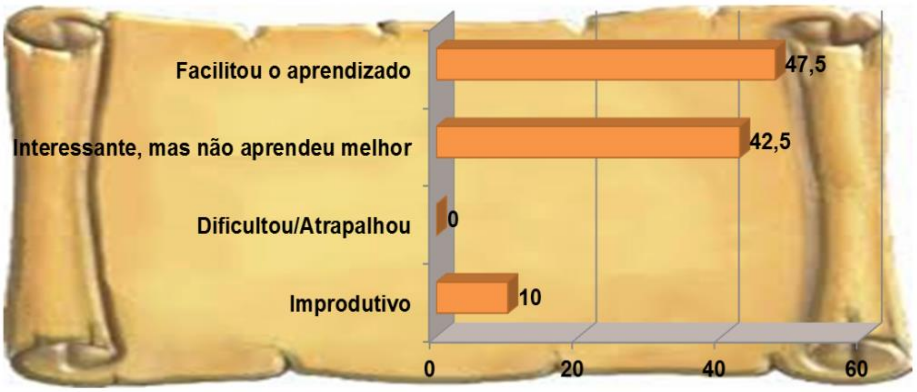
Gráfico 4 – Opinião dos alunos (%) quanto ao uso da HM para o ensino de Matemática



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Embora não tenhamos atingindo cem por cento de satisfação, o percentual de alunos que continuaram achando que a HM é improdutivo reduziu para 10%, como podemos ver no gráfico 5. Tal gráfico é o resultado percentual das respostas referentes à opinião dos pesquisados sobre ter conhecido a história de Francis Galton e como ele provou sua teoria usando Funções Afins e Estatística. Esta pergunta encontra-se no último questionário aplicado com os alunos, após as atividades realizadas (ver apêndice B com questionário pós-projeto aos alunos).

Gráfico 5 – Opinião dos alunos (%) quanto a conhecerem a história de Francis Galton e como ele provou sua teoria usando Funções Afim e Estatística



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Por fim, no início da pesquisa, nenhum aluno tinha ouvido falar antes de Francis Galton, o que nos motivou ainda mais a aplicar as atividades, descritas a seguir.

7.2 A APLICAÇÃO

Antes de iniciarmos a aplicação das atividades, sentimos necessidade de haver algum registro organizado das respostas dos alunos. Assim, para a coleta e análise dos dados (respostas das atividades propostas), construímos um caderno composto de vinte e uma folhas de papel pautado (folhas com linhas paralelas) e seis folhas de papel quadriculado (diferente de milimetrado, pois há apenas uma única divisão da folha por pequenos quadrados iguais). Estas quantidades foram estimadas pelo número de atividades propostas. Encadernamos as folhas com uma capa, exibidas nas figuras 20 e 21. Distribuímos um caderno para cada aluno.

Todas as imagens que cercam as margens do caderno foram previamente selecionadas a fim de fazer um resumo de tudo que estava planejado estudar ao longo da aplicação do projeto.

Figura 20 – Capa do caderno de atividades entregue para cada aluno participante do projeto

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Figura 21 – Foto da parte externa e interna do caderno, contendo folhas de papel pautado e quadriculadas

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Por ser impresso colorido e ter as imagens em volta, chamou a atenção dos alunos o que os fez ter mais zelo pelo caderno recebido.

Iniciamos a aplicação das atividades no início do segundo bimestre de 2015, período no qual a escola prevê o estudo da Função Afim. Juntamente com o caderno, foram entregues cópias do cronograma previsto para o bimestre. Tal documento pode ser encontrado no apêndice C deste trabalho.

Posteriormente, o cronograma precisou de adaptações e sofreu algumas mudanças de tempo, devido a problemas técnicos no laboratório que nos deixou sem energia e baixa velocidade da internet e do próprio processador da máquina. Vale ressaltar que não ter o computador em um determinado momento planejado, para trabalhar uma atividade, não impede de o aluno continuar a aprender. Afinal,

> [...] a reorganização do pensamento se dá não só apenas na presença da mídia, mas também na sua ausência, englobando também a capacidade heurística de saber buscar determinada mídia em um dado momento. (BORBA, 2001, p.143)

Desse modo, interrompemos as atividades e reservamos duas aulas, cada uma contendo 45 minutos de duração, para explorar a teoria de alguns conceitos matemáticos que estavam causando dificuldades e confusão nos alunos. É importante que o professor, ao trabalhar com as TIC em suas aulas, tenha sempre em mente planejamentos extras para serem executados, caso ocorra algo fora do previsto. Na verdade, o professor deve previamente listar todas as possibilidades de situações e estar preparado para lidar com cada uma delas. É possível, também, evitar algumas dessas situações, indo ao laboratório de informática antes da aula e verificando se todos os computadores estão funcionando; se possuem internet e outro *software* importante para a aula; se a quantidade de computadores é suficiente para a quantidade de alunos da turma ou se terá que montar grupos de estudo; se há cadeiras suficientes; se não haverá outro professor usando o laboratório no dia da sua aula; se há rede sem fio liberado para os alunos, em caso de necessidade de uso do telefone móvel ou computadores portáteis; dentre outras checagens.

As aulas de Matemática nesta turma aconteciam nas quartas e nas quintas-feiras. Contudo, houve aplicações do projeto em algumas segundas e

terças-feiras, devido a uma permuta de horário com professores de outras disciplinas que precisaram se ausentar no dia de suas aulas.

Por estes ocorridos e modificações no cronograma, decidimos apresentar a descrição de todo o processo de aplicação de ambas as atividades realizadas por data de aplicação (lembrando que cada data refere-se a um único dia e é composto por duas aulas seguidas contendo, cada uma delas, 45 minutos de duração), conforme veremos a seguir.

Ressaltamos também que os diálogos citados entre os alunos e entre os alunos e a professora pesquisadora se deram ao longo das atividades e foram captados pela docente e anotados em seu diário de campo. Cada aluno foi identificado com as iniciais dos seus nomes.

7.2.1 Dia 1 – 13 de junho (90 minutos – 2 aulas)

Iniciamos a atividade 1 (ver apêndice D com a primeira atividade) no laboratório de informática da escola. Entregamos a cada aluno uma cópia das páginas iniciais do material elaborado. Tais páginas referem-se à História de Francis Galton, desde o seu nascimento até a criação do termo *Eugenia*.

A cada parágrafo da primeira leitura, um aluno da turma era escolhido pelo docente, aleatoriamente, para ler em voz alta e a turma acompanhar. Tal sistemática fez com que todos os alunos ficassem atentos, pois poderia ser qualquer um deles o próximo a ler.

Após o término da leitura, foram reservados trinta minutos para a realização de pesquisas (com o recurso da internet) que responderiam às seguintes questões, contidas nas folhas de atividades:

Questão 1. O que é Eugenia e quais são seus objetivos?

Questão 2. Em que consiste o estudo da seleção natural de Charles Darwin e o que ele tem a ver com a Eugenia?

Questão 3. Quais possíveis problemas a Eugenia traz para a sociedade?

Questão 4. Acha que a Eugenia tem a ver com Matemática? Caso sim, o quê? Caso não, acha que poderia ter?

A importância dessas questões introdutórias se dá pelo fato da *Eugenia* ser um tema complexo que causa polêmica e é carregado de racismo e preconceitos. É importante que o professor discuta abertamente com os alunos

estas questões de modo que os estudantes não façam um julgamento equivocado das ideias eugênicas. No entanto, os alunos devem compreender a construção da Matemática como um processo histórico que se relaciona estreitamente com os aspectos sociais, políticos e econômicos da época. Esta é uma das sugestões dos PCN quando recomendam a inserção da HM nas atividades e que conseguimos alcançar ao provocar essa discussão nos estudantes acerca dos problemas causados pela Eugenia. Além disso, se as teorias de Galton eram aceitas na época e hoje causam revoltas sociais, retoma a afirmação de Miguel (1993) que as percepções mudam ao longo do tempo.

Todos os alunos transcreveram trechos fieis da internet para responder o que era Eugenia. Contudo, na questão 3 da folha de atividades, que perguntava sobre os problemas causados por este ramo da ciência, todos os alunos responderam com suas próprias palavras, dispensando o recurso da internet. Muitos alegaram que *a resposta era óbvia*. Este fato nos fez concluir que os discentes entenderam o significado do termo. Além disso, na resposta da questão 4, acerca da relação da Matemática com a Eugenia, 54,5% dos alunos não acham que a Eugenia possui alguma ligação com a Matemática. A justificativa foi que este estudo se relaciona apenas com a Biologia. Dos restantes 45,5% que responderam ter uma ligação, 16% justificaram usando o termo *probabilidade genética* e 13% citaram *medidas genéticas*. Assim, neste momento inicial da aplicação, pouco menos da metade dos alunos puderam perceber as relações existentes entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, como prevê Miguel (1993) ao citar as funções pedagógicas da História. Mas, ao fim da aplicação, todos puderam compreender a relação estabelecida.

A seguir, transcrevemos a fala de uma aluna em relação a esta questão:

> *Aluna PB: Professora, essa resposta é meio óbvia, porque para ter a Eugenia você precisa de um padrão e para ter esse padrão você precisa de números para medir. Logo, tem tudo a ver com a Matemática!*

Como nem todos os computadores do laboratório tinham internet, permitimos que os alunos pesquisassem em seus *smartphones* pessoais, usando a rede *wi-fi* na escola, como é visto na figura 22 a seguir.

Figura 22 – Alunos fazendo a pesquisa pelo *wi-fi* dos telefones móveis

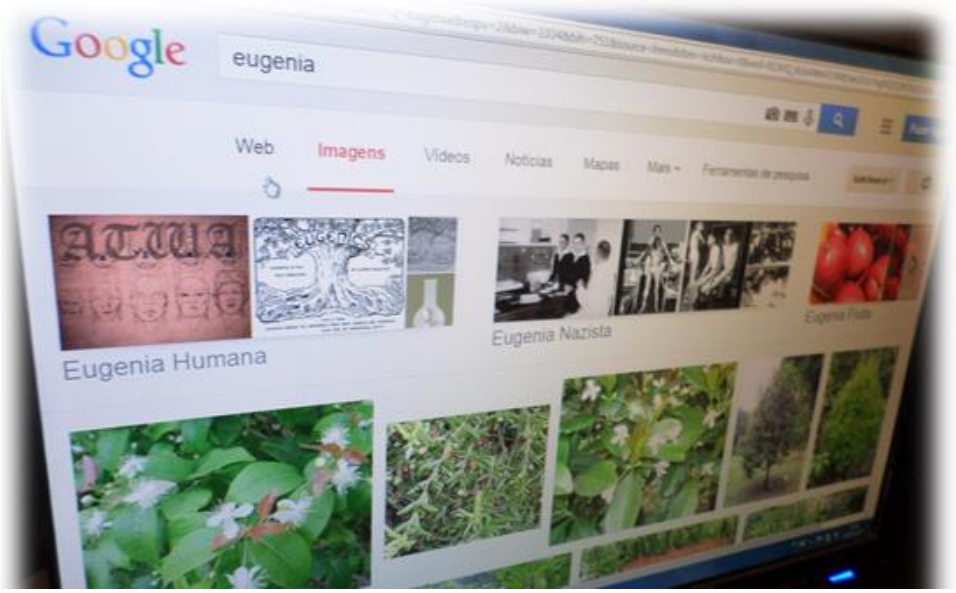
Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Alguns alunos ficaram incomodados com a diversidade de informações e outros até se divertiram com as respostas absurdas que encontraram. Podemos observar nas falas de alguns discentes (captadas na aula e registradas no diário de campo da pesquisadora durante a aplicação) a preocupação em obter informações confiáveis. Observe a transcrição a seguir:

> *Aluna AM: Professora, esse site é seguro mesmo?* (Pesquisando no *Infoescola*)
>
> *Aluno JK: Professora, fui pesquisar no Yahoo e a resposta que eu encontrei foi de uma menina que disse assim: 'Eugenia sou eu, é o meu nome, eu sou gênia!'* (risos)
>
> *Aluna PB: Professora, cada site diz uma coisa diferente. Eu ponho o quê?*

Um aluno decidiu fazer a pesquisa optando por imagens de Eugenia. O resultado da pesquisa é visto no computador dele, na figura 23.

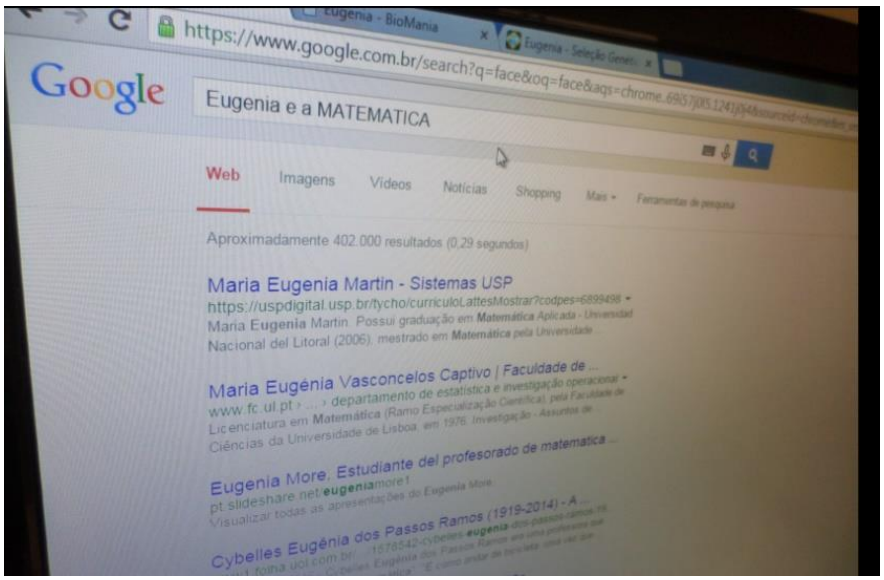
Figura 23 – Resultado da pesquisa de um aluno sobre Eugenia



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Na imagem 24 é possível visualizar que foram encontrados quatrocentos e dois mil resultados com os termos *Eugenia* e *Matemática*, pesquisado por um dos alunos.

Figura 24 – Resultado da pesquisa de um aluno sobre a relação entre a Eugenia e a Matemática



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

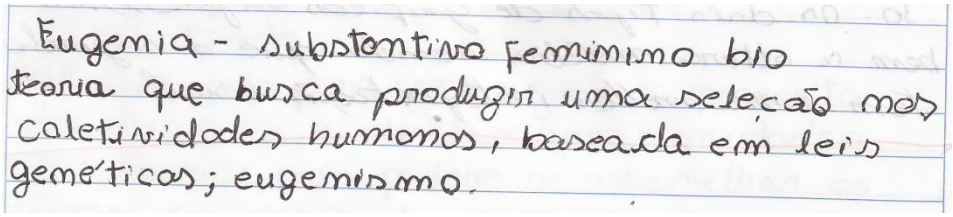
Consideramos esse momento de seleção de informação muito produtivo, visto que a informação, por si só, nos traz uma série de dúvidas e procedimentos necessários para garantir a sua veracidade. Gustavo Reis, em uma palestra sobre inovação na educação, em 2012, comenta a respeito.

> Esta quantidade infinita de informação que nos é oferecida hoje pelos mecanismos de busca se traduz, na prática, em conhecimento zero. Se não houver seleção de informação relevante e um estabelecimento de vínculo entre as informações relevantes, a informação infinita tende a zero na leitura do conhecimento. (REIS, 2012, s/p.)

Os professores devem ficar atentos à seleção de informação realizada pelos alunos. Se houver necessidade, o docente pode dar algumas dicas de como fazer uma boa pesquisa. Dar preferência a sites governamentais, institucionais, acadêmicos e sites que tenham o nome do autor e o ano da publicação; optar sempre por artigos ao invés de blogs são dicas úteis para obter informações confiáveis do que se procura.

Ao analisarmos as respostas dadas aos alunos para as primeiras questões, observamos que alguns deles copiaram o texto fiel encontrado na internet. Observem na figura 25 a resposta de um aluno acerca do que é a Eugenia e quais são seus objetivos.

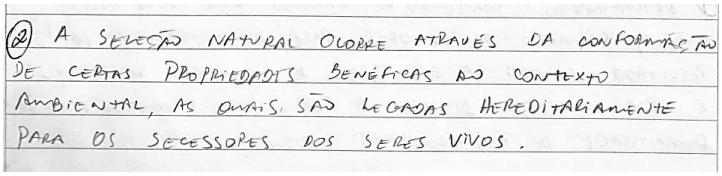
Figura 25 – Resposta de um aluno para a questão: *o que é Eugenia e quais são os seus objetivos*


Eugenia - substantivo feminino bio
teoria que busca produzir uma seleção nas
coletividades humanas, baseada em leis
genéticas; eugenismo.

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Na figura 26 podemos observar outro aluno respondendo a segunda questão sobre a seleção natural de Charles Darwin e sua relação com a Eugenia.

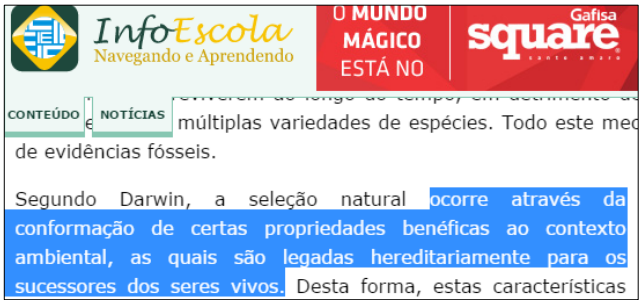
Figura 26 – Resposta de um aluno à questão: *em que consiste a seleção natural de Charles Darwin e o que ela tem a ver com a Eugenia*


(2) A SELEÇÃO NATURAL OCORRE ATRAVÉS DA CONFORMAÇÃO DE CERTAS PROPRIEDADES BENÉFICAS AO CONTEXTO AMBIENTAL, AS QUAIS SÃO LEGADAS HEREDITARIAMENTE PARA OS SECESSORES DOS SERES VIVOS.

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Na figura 27 comprovamos que o trecho transcrito pelo aluno é exatamente o que está dito em uma página na internet.

Figura 27 – Trecho da internet que o aluno transcreveu fielmente para responder à questão 2 da primeira atividade

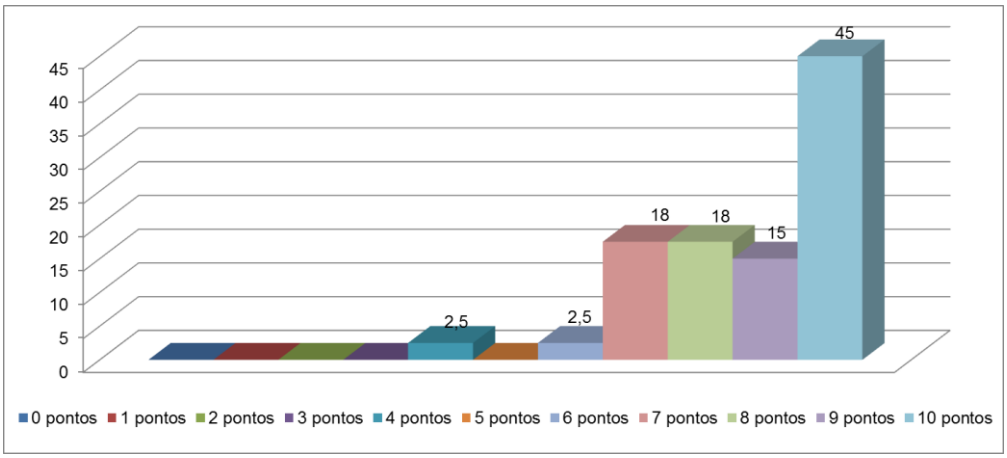


Fonte: InfoEscola (s/d).

Para garantir que os alunos respondam de forma consciente cada questão, o professor pode solicitar que, ao realizarem as pesquisas, respondam as questões com suas próprias palavras, do modo como entenderam os resultados encontrados. Se isso ainda assim não evitar as transcrições dos trechos da internet, o docente pode pedir que os alunos (alguns ou todos) leiam a sua resposta à turma e, posteriormente, peça que o aluno interprete ou explique a resposta dada. Outra atitude é fazer outras perguntas ao aluno para que ele seja induzido a responder de forma diferente do que foi transcrito.

No fim do projeto, ao serem questionados sobre o grau de satisfação em pesquisar na internet, 45% dos alunos atribuíram nota dez (completamente satisfeitos). As notas mais baixas foram 4 e 6 pontos, atribuídas, cada uma, por um aluno (2,5%), como podemos confirmar no gráfico 6 a seguir:

Gráfico 6 – Grau de satisfação dos alunos ao utilizarem os sites de pesquisa, na internet, como auxílio de resposta para algumas questões da atividade 1



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Estes resultados comprovam as teorias de que a informática, de fato, causa interesse e motivação nos estudantes. Mais ainda, não substitui o docente, nem tira seu papel de orientar os alunos e garantir que eles aprendam com o auxílio do recurso tecnológico.

Após o tempo de pesquisa e socialização das respostas, a aula havia acabado e, assim, demos continuidade ao primeiro encontro na aula seguinte.

7.2.2 Dia 2 – 15 de julho (90 minutos – 2 aulas)

Nesta aula, ainda no laboratório de informática, entregamos cópias das páginas que dão continuidade à História de Galton. O texto respondia as perguntas que foram anteriormente feitas para os alunos e pesquisadas por eles, acerca da definição da *Eugenia*, do termo *Seleção Natural*, dos problemas ocasionados pela Eugenia e da sua relação com a Matemática.

Embora os discentes já tivessem pesquisado e respondido sobre essas questões, entendemos que esta retomada no próprio texto, fonte da atividade, se faz importante para que nenhum aluno deixe de responder às questões propostas inicialmente, por falta de tempo ou de compreensão. Desse modo, garantimos que o estudante possa acompanhar a turma nas leituras e atividades seguintes.

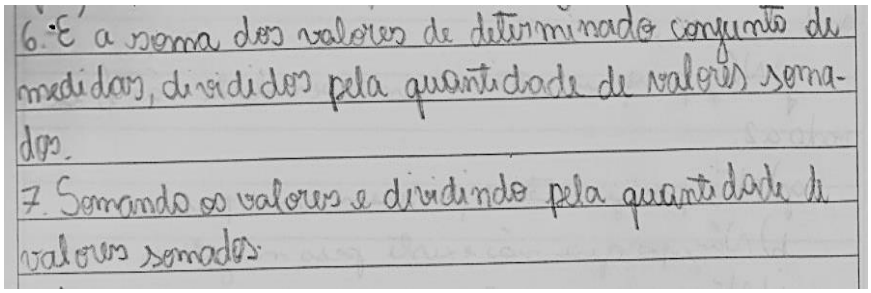
Neste dia, a leitura continuou dinâmica. Quando leram a citação acerca dos instrumentos que Galton usou nas medições, logo um aluno recorreu à internet para pesquisar imagens do instrumento *fotômetro* citado no texto. O interesse do aluno é constatado em sua fala:

> *Aluno PT: Professora, esse fotômetro é muito chique! Pelo menos os de hoje. Vou pesquisar os de antigamente, péra aí.*

Isso deu margem para outros alunos também fazerem a pesquisa que, embora não estivesse previsto na atividade, provocou a motivação que Fossa, Mendes e Valdés (2006) citam como vantagem ao se estudar HM.

Dos 34 alunos que responderam à questão 5 (*Descrever algumas situações em que você já ouviu falar em média*) apenas dois dos discentes não citaram média escolar como exemplo de média. Ao perguntarmos sobre o significado da palavra *média* na questão 6, a maioria dos alunos confundiu com o conceito de média aritmética, que era a pergunta da próxima questão. Esperávamos que a sequência das perguntas causasse um conflito cognitivo nos alunos, visto que ao responderem média como a soma de todos os valores dividida pela quantidade total, eles deveriam pensar em outra resposta para a questão seguinte, sobre média aritmética. Ao concluírem que a definição na questão 6 supracitada (sobre média) estava errada, pois era exatamente a resposta da questão 7 (*Como se calcula a média aritmética de um conjunto de valores conhecidos?*), eles voltariam para a questão 6 e pesquisariam outra resposta. Isso aconteceu com a maioria dos alunos, mas uma aluna repetiu a resposta nas duas questões, como é mostrado na figura 28.

Figura 28 – Definição de uma aluna sobre média e média aritmética

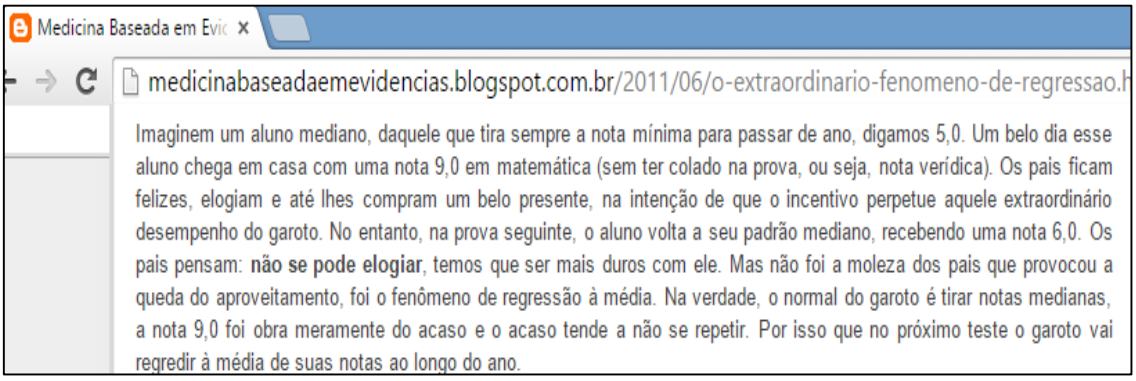

6. É a soma dos valores de determinado conjunto de medidas, divididos pela quantidade de valores somados.
7. Somando os valores e dividindo pela quantidade de valores somados.

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Posteriormente, no dia da socialização dos resultados, apresentamos a resposta da maioria dos alunos a esta questão. A aluna que cometeu o equívoco percebeu o erro e se corrigiu.

Diminuir, retroceder e voltar foram as palavras usadas pelos alunos para responder à questão 8 (*O que você lembra quando ouve ou lê a palavra regredir?*). Influenciados por esta questão, todos definiram *regredir à média*, que era a questão 9, como voltar para a média, de modo que há um valor médio e outro valor maior que aquele, o qual irá voltar a ser médio. Isso também se deu pelo fato da maioria pesquisar em um mesmo site que dava como exemplo de regressão à média uma nota escolar que saia de um valor maior para um menor, como é explicado no trecho retirado do site e mostrado na figura 29 a seguir.

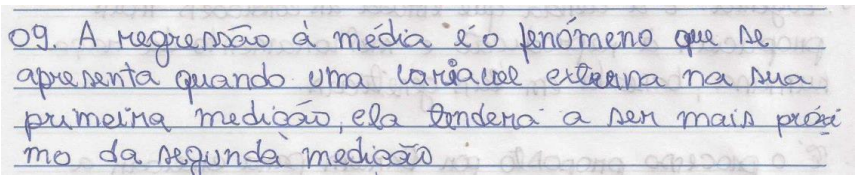
Figura 29 – Trecho da internet que exemplifica o termo *regressão à média*



Fonte: Correia (2011).

No texto completo do site mostrado, não há um exemplo contrário, isto é, de um aluno que tirou menos que seis pontos por obra do acaso e, posteriormente, voltou à média. Embora nenhum aluno tenha pensado, de forma clara, no caso de estar abaixo da média e voltar à média de forma a ter um número maior que antes, elegemos como a resposta mais satisfatória (mesmo com evidências de transcrição fiel da internet) para esta pergunta, a que se encontra na figura 30 a seguir.

Figura 30 – Definição de regressão à média de um aluno


09. A regressão à média é o fenômeno que se apresenta quando uma variável extrema na sua primeira medição, ela tenderá a ser mais próximo da segunda medição

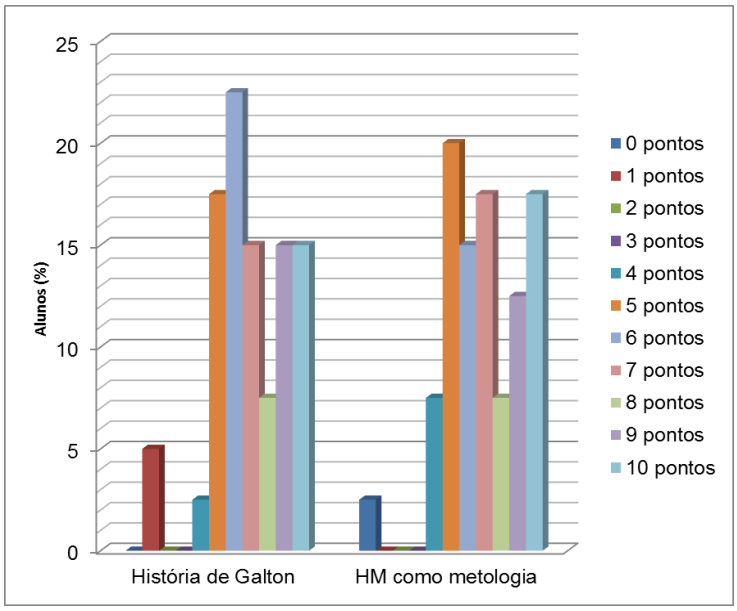
Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Observamos nesta resposta que o aluno se refere à distância das variáveis à média, sem especificar como essa aproximação irá ocorrer.

Ainda neste dia, seguimos a leitura exibindo o gráfico construído por Galton para representar a regressão à média no experimento das estaturas de pais e filhos. Talvez pelo excesso de atividades, pelo tempo decorrido (faltavam poucos minutos para o término da aula e início do intervalo) ou ainda por ser uma leitura técnica, os alunos demonstraram menos interesse e ficaram mais dispersos neste momento.

Mesmo apresentando dificuldades e cansaço, os estudantes, ao serem questionados sobre o grau de satisfação em conhecer a história de Galton e usá-la para aprender assuntos matemáticos, mais de 90% atribuíram notas maiores ou iguais a 5, como podemos ver no gráfico 7.

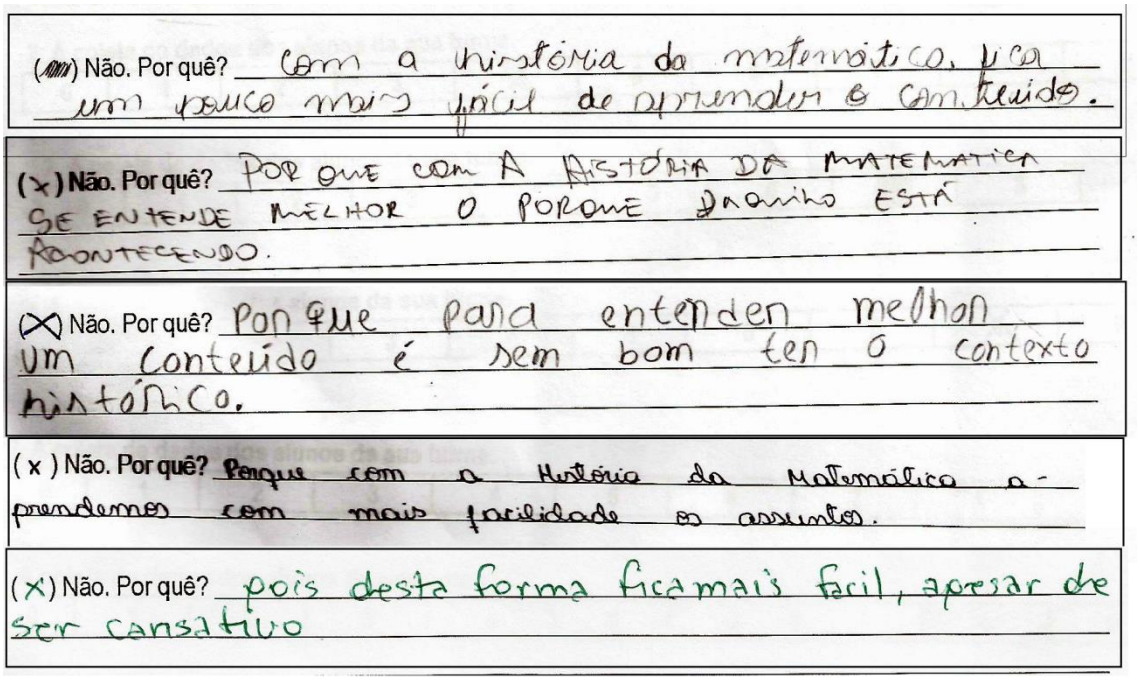
Gráfico 7 – Notas atribuídas pelos alunos para o estudo da história de Galton e o uso da história como metodologia



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Mais da metade da turma (57%) afirmou não preferir que os assuntos estudados fossem abordados sem a HM, justificando que *apesar de cansativo, ficou mais fácil aprender*. Na figura 31, são mostradas algumas das justificativas dos alunos.

Figura 31 – Resposta dos alunos no questionário pós-projeto acerca de estudar Matemática *sem* o uso da HM


(✓) Não. Por quê? com a história da matemática, fica um pouco mais fácil de aprender o conteúdo.

(x) Não. Por quê? POR QUE COM A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA SE ENTENDE MELHOR O PORQUE DAQUILO ESTÁ ACONTECENDO.

(X) Não. Por quê? Por que para entender melhor um conteúdo é sem bom ter o contexto histórico.

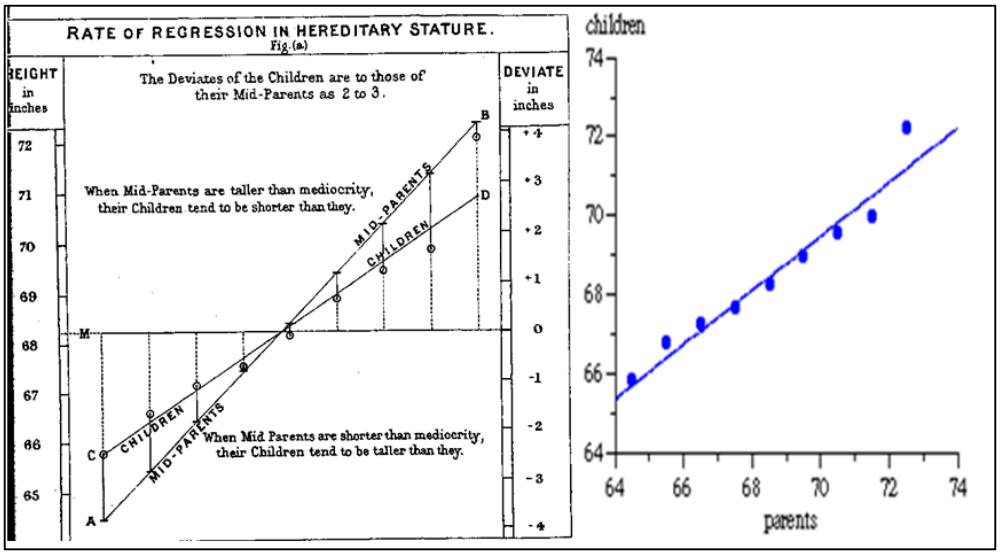
(x) Não. Por quê? Porque com a História da Matemática a-prendemos com mais facilidade os assuntos.

(x) Não. Por quê? pois desta forma ficamais facil, apesar de ser cansativo

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Para resolver a questão da fadiga mental dos estudantes, aconselhamos que, no momento da leitura técnica (com formalismo matemático), o docente divida os alunos em pequenos grupos para que eles possam ler e discutir entre si. Também será melhor aproveitado que isso seja feito, se possível, em outra aula, destinada apenas a esta parte da leitura e da resposta da questão 10 (Estabelecer semelhanças e diferenças entre os dois gráficos mostrados, o de Galton, e o de Smith (1997, s/p) que traz as mesmas informações do primeiro, porém, numa linguagem mais atual). Veja na figura 32 a imagem desses dois gráficos juntos, já apresentados aqui, no capítulo 3. A maioria respondeu esta questão, que solicitava a comparação entre os gráficos, de forma incompleta, isto é, citando apenas uma semelhança e/ou apenas uma diferença.

Figura 32 – Junção dos dois gráficos exibidos na atividade 1 e pedidos na questão 10 para serem comparados



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

As semelhanças citadas pelos 25 alunos que responderam foram os pontos fora da reta que se encontram em ambos os gráficos comparados e os dados apresentados que correspondem a mesma variável (altura de pais e filhos). Como no primeiro gráfico (à esquerda da figura 32) há três retas, onde uma delas representa a média das alturas e é nomeada com a letra *M*, 32% dos alunos acharam que a reta do gráfico 2 (à direita da figura 32) também representava a média das alturas. Resolvemos não esclarecer este equívoco de imediato, pois posteriormente os alunos iriam construir o mesmo gráfico mostrado à direita da figura 32 e poderiam, por si sós, concluir que a reta construída não representava uma média, mas sim uma função.

Acerca das diferenças, 61,7% das respostas menciona a posição dos eixos, uma vez que, no primeiro gráfico, os eixos se encontram paralelos enquanto que no segundo eles se cruzam. Contudo, nenhum aluno mencionou o significado de cada um desses eixos.

Tínhamos como objetivo, nesta questão, fazer com que os alunos aprendessem a ler e interpretar dados e informações representadas graficamente. Tais habilidades são de extrema importância e constituem alguns dos objetivos da Educação Estatística (FLORES; MORETTI, 2005). Contudo,

não observamos com esta questão que os alunos, de fato, adquiriram essas habilidades. Possivelmente, os discentes teriam respondido de forma completa se a eles o professor entregasse uma tabela de duas colunas e linhas numeradas. Na primeira coluna, os alunos deveriam listar um número mínimo de diferenças encontradas entre os dois gráficos e, na segunda coluna, fariam o mesmo com as semelhanças. Por isso, acrescentamos esta tabela sugerida na versão final de nossas atividades (produto educacional).

No encontro em que os alunos construíram os gráficos com os próprios dados coletados, as leituras e interpretações gráficas foram mais evidentes e satisfatórias. Assim, realmente confirmamos que se aprende Estatística fazendo Estatística, como afirmam Campos; Wodewotzki e Jacobini (2013).

Para finalizar este dia, os alunos levaram para casa uma tabela para preencher com suas respectivas alturas, massas e tempos de resposta de um jogo de raciocínio lógico chamado *Jogo dos Canibais e Missionários*[24], bem como dos seus parentes mais próximos de geração anterior a sua. Pedimos que priorizassem a altura do parente feminino e do parente masculino, a fim de sermos o mais fiel possível à recriação do experimento de Galton, uma vez que ele coletou dados do pai e da mãe de filhos adultos. Houve uma aluna na turma que é adotada e por isso coletou os dados do seu primo e pais. Outra aluna que só mora com a mãe, escolheu seu vizinho para fazer as medições dele e dos seus parentes.

Essas adaptações pedagógicas ao experimento histórico são fortemente recomendadas por Miguel; et al (2009). Elas se fazem necessárias para adequarmos as atividades à realidade na qual os alunos estão inseridos, neste caso, a constituição da família e também a atividade do jogo de raciocínio logico que tinha como intuito substituir os instrumentos sensoriais criados e usados por Galton. Alguns alunos já conheciam o jogo indicado. Assim, foi permitido que eles escolhessem outro jogo na internet que tivesse a mesma potencialidade.

---

[24]Trata-se de um problema de raciocínio lógico onde há três canibais e três missionários na margem de um rio. O desafio consiste em atravessar todos os missionários e canibais para a margem oposta, levando apenas duas pessoas por vez, no barco. Se a quantidade de canibais for superior a de missionários em qualquer uma das margens, estes comem os missionários. Dessa forma, como proceder na travessia?

Nem todos os estudantes conseguiram coletar a informação do tempo de resposta do jogo porque os pais se recusaram a jogar. Além disso, como os resultados trazidos pelos alunos foram muito divergentes, gerando comentários entre eles de que algumas pessoas responderam rapidamente e outras demoraram mais, decidimos por retirar essa medida de nossas atividades. Desse modo, o professor irá encontrar em nossos apêndices apenas a atividade que diz respeito às alturas e às massas corporais dos parentes e dos filhos. Essa exclusão não prejudicará o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos, uma vez que nas três variáveis (altura, massa e tempo de resposta) os exercícios solicitados eram os mesmos (construção de gráfico de dispersão).

7.2.3 Dia 3 – 16 de julho (90 minutos – 2 aulas)

Neste encontro, a atividade ocorreu dentro da sala de aula.

Ao entregarem as tabelas preenchidas, percebemos que alguns alunos confundiram tempo de resposta do jogo com o tempo total de tentativas para solucioná-lo.

Uma vez que precisávamos ter cuidado em garantir a privacidade dos dados de cada aluno, recolhemos as tabelas para reunir todos os dados em uma planilha eletrônica, imprimir e entregar aos discentes, sem identificação, como é mostrado na figura 33 a seguir.

Para tanto, entregamos as planilhas apenas no encontro seguinte. Assim, aproveitamos este dia sem atividades do projeto para uma breve aula expositiva sobre as Funções Afim e seus gráficos. Esta foi a solução para o problema de falta de compreensão/conhecimento prévio, identificado no decorrer das questões respondidas pelos alunos. Dessa forma, aqueles que alegaram nunca ter visto este assunto ou de ter esquecido e, por este motivo, estavam sentindo dificuldades na compreensão e respostas das questões apresentadas até então, tiveram subsídio para as próximas etapas do projeto.

Lembramos, aqui, que é importante que o professor faça uma sondagem inicial para identificar esses conhecimentos prévios nos seus alunos e/ou já planeje esta aula expositiva antes da aplicação das atividades. Como já posto,

nossa proposta visa contextualizar os conceitos de Função Afim e Estatística básica e não necessariamente ensinar estes conceitos.

Figura 33 – Planilha dos dados coletados pelos alunos

ALTURA				MASSA		TEMPO DE RESPOSTA	
Filho	Parente feminino	Parente Masculino	Média dos parentes	Filho	Parente feminino	Filho	Parente feminino
1,72	1,62	1,64		74,00	66,00	15,00	11,00
1,56	1,60			56,00	59,00	1,40	3,00
1,57	1,50	1,70		75,00	75,00	20,00	15,00
1,67	1,59			50,50	64,00	11,00	20,00
1,60	1,64	1,65		46,50	74,00	13,43	30,00
1,80	1,65	1,73		69,00	67,00	5,00	10,00
1,60	1,60	1,73		46,00	55,00	10,00	10,00
1,57	1,65	1,69		53,00	73,00	2,80	4,80
1,73	1,65			66,00	72,00		
1,66	1,60	1,70		68,00	52,00	1,00	5,00
1,55	1,54	1,65		58,20	64,60		
1,60	1,54	1,65		47,00	58,00	5,13	12,46
1,65	1,56	1,70		53,00	66,00		
1,67	1,63	1,60		57,00	80,00	8,60	5,00
1,63	1,65	1,68		61,00	55,00	30,00	10,00
1,62	1,51	1,68		54,00	65,00	6,00	12,00
1,65	1,48	1,76		45,00	63,00	1,00	50,00
1,80	1,69			67,30	70,00		
1,63	1,58	1,65		52,00	50,00	7,00	14,00
1,74	1,68	1,71		52,00	67,00	15,00	5,00
1,53	1,42	1,65		57,00	59,00	20,00	30,00
1,52	1,65	1,59		63,00	60,00	50,00	25,00
1,78	1,52	1,67		76,00	67,00		
1,60	1,52	1,75		42,20	101,00	0,22	0,53
1,52	1,49			46,00	62,00	1,50	1,10
1,73	1,66	1,81		51,00	87,00	10,00	15,00
1,67	1,69	1,65		40,00	60,00	20,00	20,00
1,56	1,67			52,00	67,00		
1,57	1,49	1,75		70,00	69,00	3,00	3,00
1,64	1,59	1,84		54,00	51,00		
1,72	1,57	1,70		66,60	59,20	11,00	15,00
1,70	1,60	1,75		55,00	64,00		
1,59	1,59	1,64		58,40	72,00	7,00	9,00

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Observe na figura 33, anterior, que retiramos as respostas que continham o problema do tempo de solução do jogo e trabalhamos apenas com o tempo total de solução. Decidimos, também, retirar as massas e tempo de respostas dos parentes masculinos por ter sido menos respondido que a do parente feminino. Por alguns parentes se recusarem a fazer o jogo, há ausência de respostas na última coluna da figura 33.

7.2.4 Dia 4 – 22 de julho (90 minutos – 2 aulas)

Ainda na sala de aula, neste quarto dia, entregamos a planilha construída com os dados que os alunos coletaram, conforme a figura 33, para cada um dos discentes.

A turma foi orientada a escolher pelo menos 10 pares ordenados (pais e filhos) de uma das variáveis (altura, massa ou tempo de resposta) para

representá-los no plano cartesiano construído por eles em um papel quadriculado.

A imagem 34 a seguir, mostra os alunos construindo seus gráficos. Como eram alunos do curso de Edificações, a maioria possuía escalímetro e o usaram para as construções. No entanto, é totalmente possível realizar as atividades com régua comum, de 30 cm de comprimento.

Figura 34 – Alunos construindo, manualmente, gráficos de dispersão e ajustando os pontos a uma reta

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

A princípio, alguns alunos tiveram dificuldades na representação dos pontos no plano, colocando os valores em cada eixo de forma aleatória sem atentar às proporções ou ordem de crescimento. Sanadas estas dificuldades, os alunos deveriam, agora, traçar uma reta que passasse pelo máximo de pontos possíveis. Esta orientação foi equivocada, pois no Método dos Mínimos Quadrados, como já explicamos no capítulo 2, ajusta-se os pontos a uma reta de modo que esta reta se posicione na menor distância possível entre todos os pontos do plano (aproximação máxima da reta na concentração dos pontos), e não necessariamente passa por todos os pontos possíveis. O equívoco só foi

descoberto por um aluno, no momento de representar os gráficos manuais no *Excel*, o que nos deixou satisfeitos, pois foi mais uma forma dos alunos enxergarem os gráficos, analisarem as diferenças e estabelecer o sentido real de cada um deles.

Logo após as construções manuais dos gráficos, nos cadernos de respostas das atividades, os alunos tiveram que responder às questões 14, 15 e 16, que se encontram nas folhas das atividades e são mostradas a seguir:

Questão 14. A partir da reta traçada, faça um estudo investigativo da sua construção. Tente responder as seguintes questões, justificando com suas próprias palavras:

a) Existe uma relação de dependência entre os dois eixos do plano (horizontal e vertical)?

b) A variável do eixo x (horizontal) permite ter mais de um correspondente?

c) A variável do eixo y (vertical) permite ter mais de um correspondente?

d) Por que o gráfico traçado é de uma função?

e) A função pode ser afim?

f) A função pode ser quadrática?

g) A função pode ter o termo independente nulo (faça a projeção da reta traçada de modo que ela corte o eixo y)?

h) A função pode ter o termo independente negativo?

i) A função pode ter coeficiente angular negativo?

j) Qual a tangente do ângulo de inclinação dessa reta e o que isso representa na função?

k) Como é possível saber exatamente os valores dos coeficientes numéricos da função?

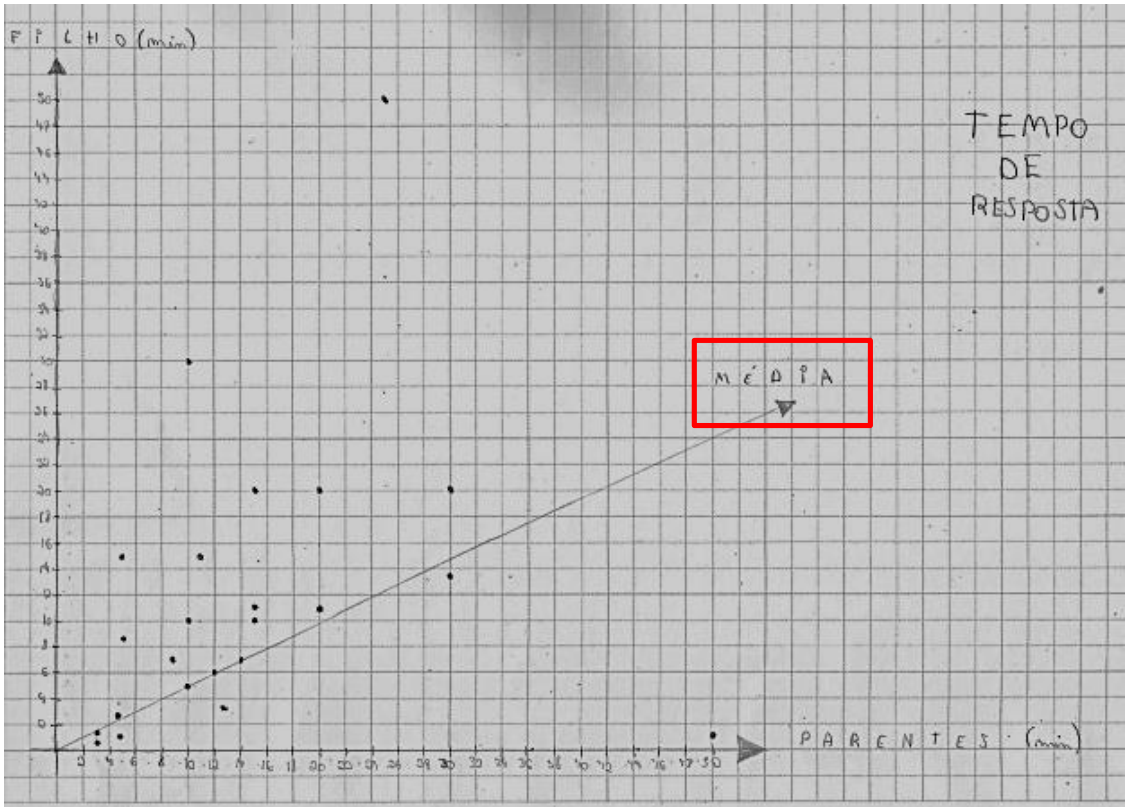
Questão 15. Após todas as respostas registradas, tente estimar a função que melhor representa a reta por você traçada. Analise os melhores valores para os coeficientes numéricos da função e o melhor expoente da variável x.

Questão 16. Após estimar a função, use-a para fazer estimativas. Qual seria a altura do filho cujo pai mede 2 metros, por exemplo? Explique como obteve o resultado.

Pelo fato do gráfico de Galton conter uma reta que indicava a média das alturas dos indivíduos, alguns alunos pensaram equivocadamente que a reta da

função construída por eles também representava essa média. Na figura 35 a seguir é possível ver esta confusão, com o gráfico construído pelo aluno *LT*.

Figura 35 – Construção do gráfico de dispersão e o ajuste dos pontos à reta

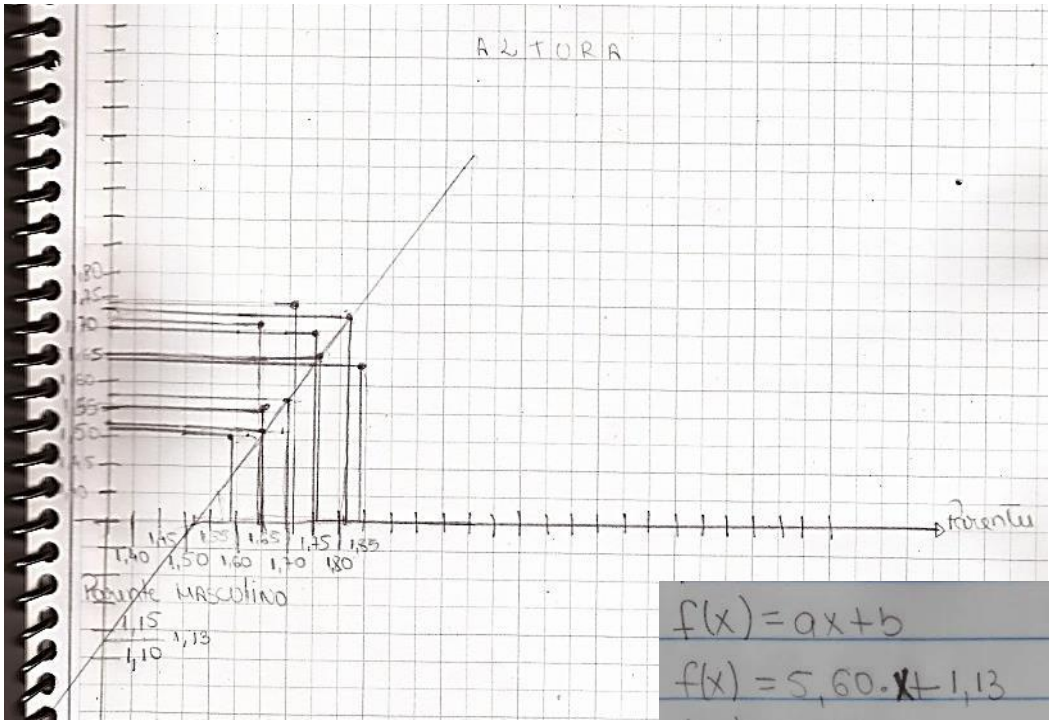


Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Posteriormente, no momento da socialização dos resultados, este erro foi retomado e corrigido junto à turma, como detalharemos nos tópicos seguintes. Este momento é previsto no nosso cronograma e se faz importante entre as fases da IM (também presente na pesquisa).

A reta traçada por alguns alunos, ao ser projetada, não passava pela origem, *cortando o eixo y* em alguns casos, em valores negativos e, portanto, fazendo com que o termo independente na Função Afim se tornasse negativo. Embora os alunos tenham percebido e realizado a projeção, não atentaram ao fato de que os valores abaixo do eixo *x* são negativos. Assim, ao estimar a função, também deixaram o termo independente com o sinal positivo, conforme vemos na figura 36 a seguir, que mostra, respectivamente, o gráfico e a função estimada por uma mesma aluna.

Figura 36 – Gráfico de dispersão ajustado de uma aluna e a estimativa da função



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

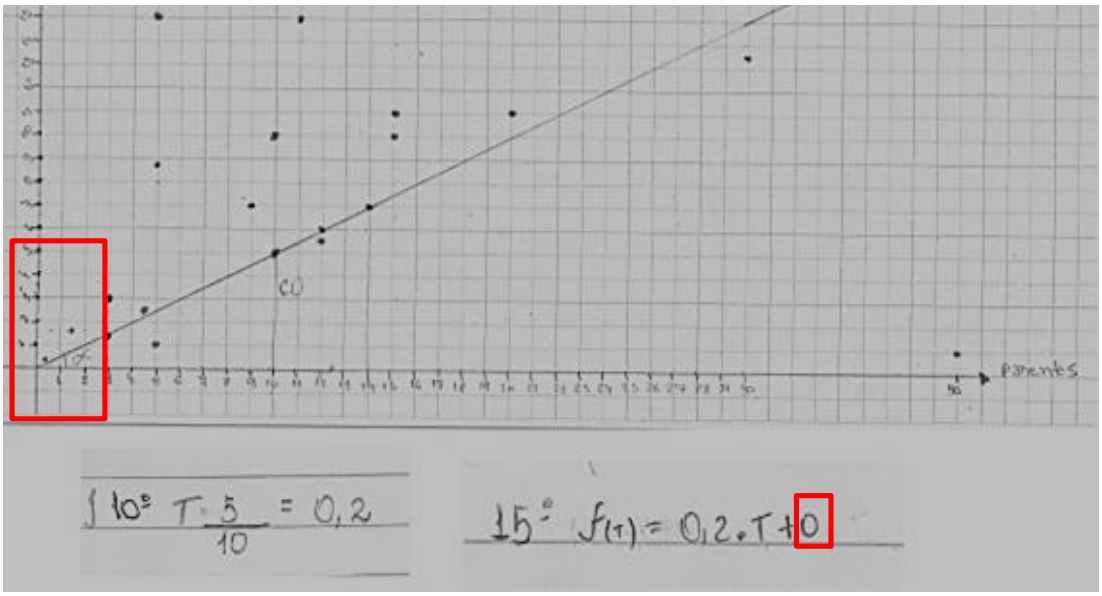
Após a projeção da reta até o eixo vertical *y*, o aluno que construiu o gráfico da figura 36 continuou a numeração de cada parte do eixo, para saber em que ponto a reta tocava. Por esquecimento e/ou falta de atenção ele não percebeu que os números abaixo do eixo horizontal *x* eram negativos. Percebemos na figura que o estudante continuou a numeração do eixo *y*, obedecendo a ordem decrescente dos pontos. Isso nos mostra que, embora ele não tenha se atentado aos pontos negativos, estava consciente que os números iriam reduzindo à medida que se marcavam pontos abaixo do anterior.

Optamos por não chamar a atenção para o equívoco neste momento, pois esperávamos que os próprios alunos chegassem às devidas conclusões quando reconstruíssem o gráfico no *Excel* e comparassem com os feitos à mão. Mesmo que alguns alunos não refizessem o próprio gráfico, mas sim do seu colega, visto que neste momento as atividades seriam em duplas, ainda assim seria possível o grupo identificar se os valores dos coeficientes numéricos da função (*a* e *b*)

estavam condizentes com o gráfico apresentado pelo programa. De fato, isso ocorreu, como veremos mais adiante, no tópico 7.2.6 deste trabalho.

Ainda nas construções manuais e sobre o termo independente, percebemos que quando ele era nulo ou positivo o erro de estimativa do seu valor não ocorreu por nenhum aluno. Podemos verificar isso nas figuras 37 e 38 a seguir, que mostram os dois casos distintos de dois alunos.

Figura 37 – Construção manual do gráfico e estimativa da função quando a reta passa pela origem



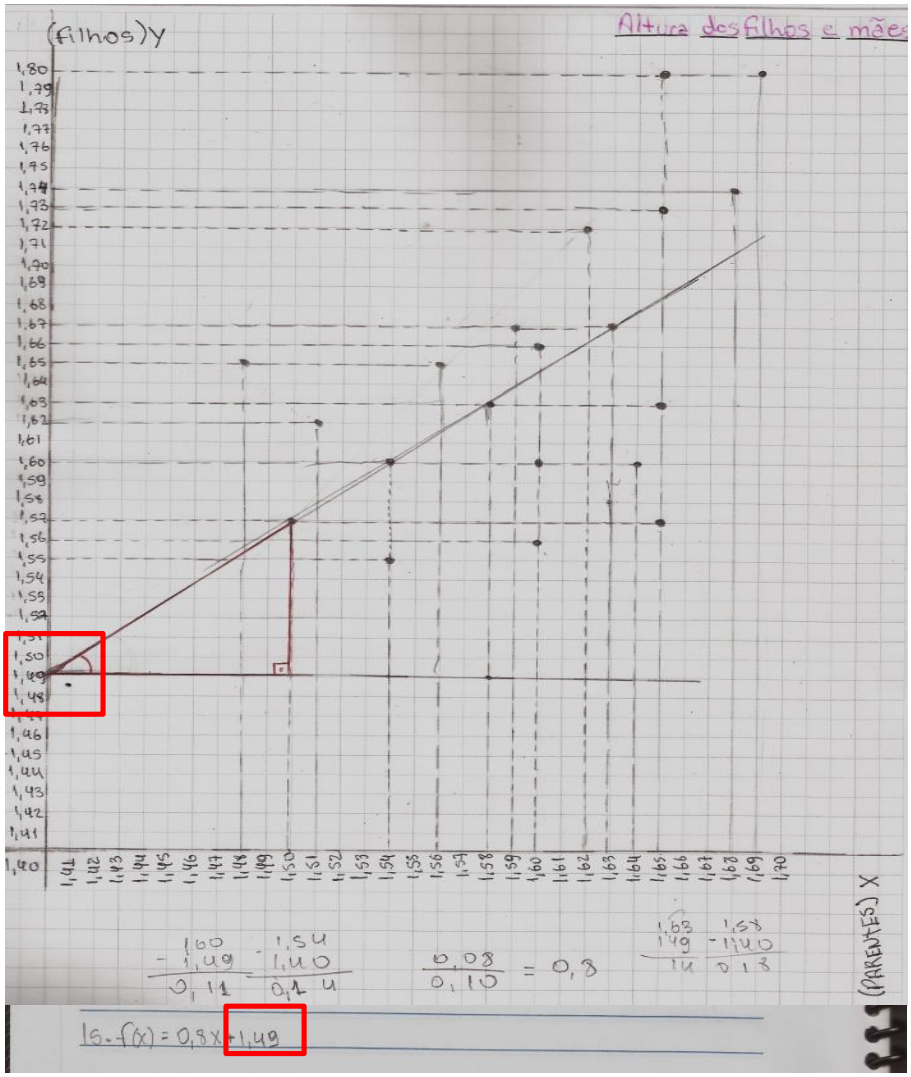
Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Na figura 37, o estudante traçou a reta de modo que ela passou pela origem, isto é, pelo ponto (0,0), em destaque na imagem. Podemos afirmar que o aluno deixou claro que estava consciente sobre o que essa informação significa para a função, uma vez que escreveu o número zero no lugar do coeficiente linear. Vale ressaltar, também, que o estudante identificou corretamente o triângulo retângulo formado pela reta e o eixo *x* do plano cartesiano e encontrou o valor do coeficiente angular por meio da fórmula da tangente do ângulo.

Na figura 38 a seguir, embora a reta, dessa vez, não passe pela origem do gráfico, o aluno identificou corretamente o triângulo retângulo, destacando, inclusive, com caneta vermelha. Além disso, podemos observar que, por meio da fórmula da tangente do ângulo, o aluno encontrou o valor do coeficiente angular. É perceptível que este aluno também compreendeu o significado da reta

passar pelo eixo *y*, pois encontrou corretamente o valor do coeficiente linear, como destacamos na figura.

Figura 38 – Construção manual do gráfico e estimativa da função quando a reta passa pelo eixo positivo de *y*



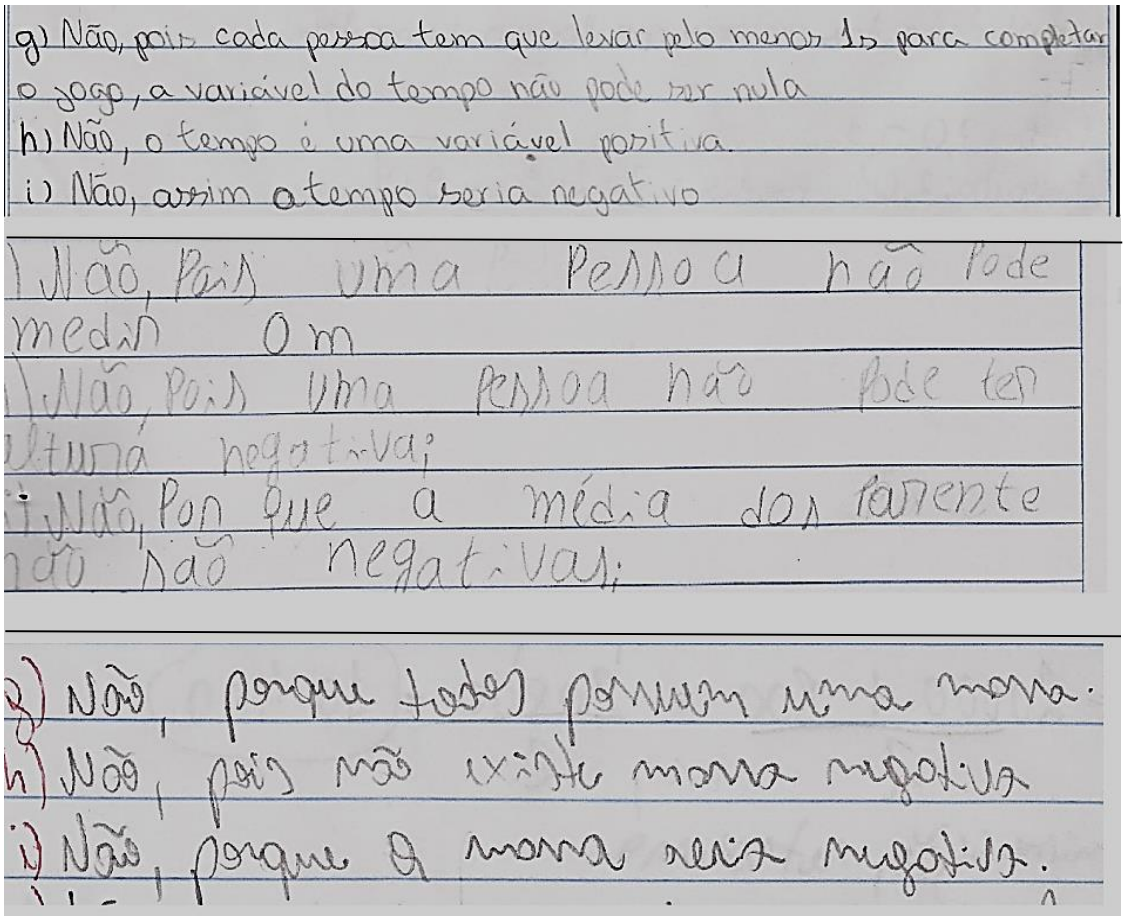
Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Atribuímos o erro do sinal do termo independente ao fato dos alunos terem confundido coeficientes numéricos (*a* e *b* da Função Afim) com variáveis independente e dependente (*x* e *y* da Função Afim).

Essa confusão fica clara nas respostas dos itens *g* e *h* da questão 14. Como as variáveis *x* e *y* escolhidas (altura, massa ou tempo de resposta dos filhos e parentes) não permitem valores negativos, 73% dos alunos entenderam que os coeficientes numéricos da função (*a* e *b*) também não poderiam assumir

valores negativos. A justificativa de algum dos alunos pode ser visualizada na figura 39.

Figura 39 – Respostas de três alunos acerca do termo independente da Função Afim poder ser nulo ou negativo


g) Não, pois cada pessoa tem que levar pelo menos 1s para completar o jogo, a variável do tempo não pode ser nula
h) Não, o tempo é uma variável positiva.
i) Não, assim o tempo seria negativo

) Não, Pois uma Pessoa não Pode medir 0 m
) Não, Pois uma Pessoa não Pode ter altura negativa;
i) Não, Por que a média dos Tempo não são negativas;

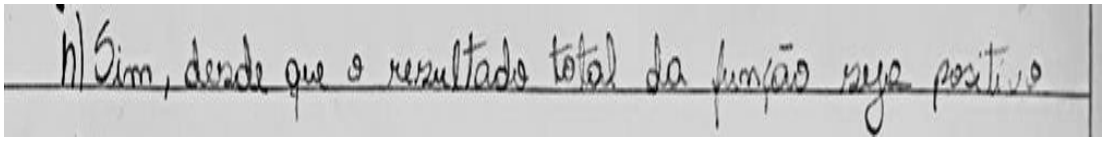
g) Não, porque todos possuem uma massa.
h) Não, pois não existe massa negativa
i) Não, porque a massa seria negativa.

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Para que este erro não ocorra novamente em futuras aplicações desta mesma atividade, se faz necessário que, no momento de resposta dessa questão, o professor deixe claro para os alunos a diferença de coeficientes numéricos (*a* e *b*) para variáveis (*x* e *y*), especialmente, quando associados à definição de função e ao que representa neste contexto.

Em contra partida a este erro, 43% dos alunos responderam que o coeficiente angular poderia ser negativo, caso a reta fosse decrescente e uma aluna conseguiu identificar corretamente o termo independente mencionado nos itens *g* e *h* da questão 14 (ver apêndice *D*), diferenciando-o ainda das variáveis da função, como é mostrado na figura 40.

Figura 40 – Resposta quando o termo independente da Função Afim era negativo


h) Sim, desde que o resultado total da função seja positivo

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

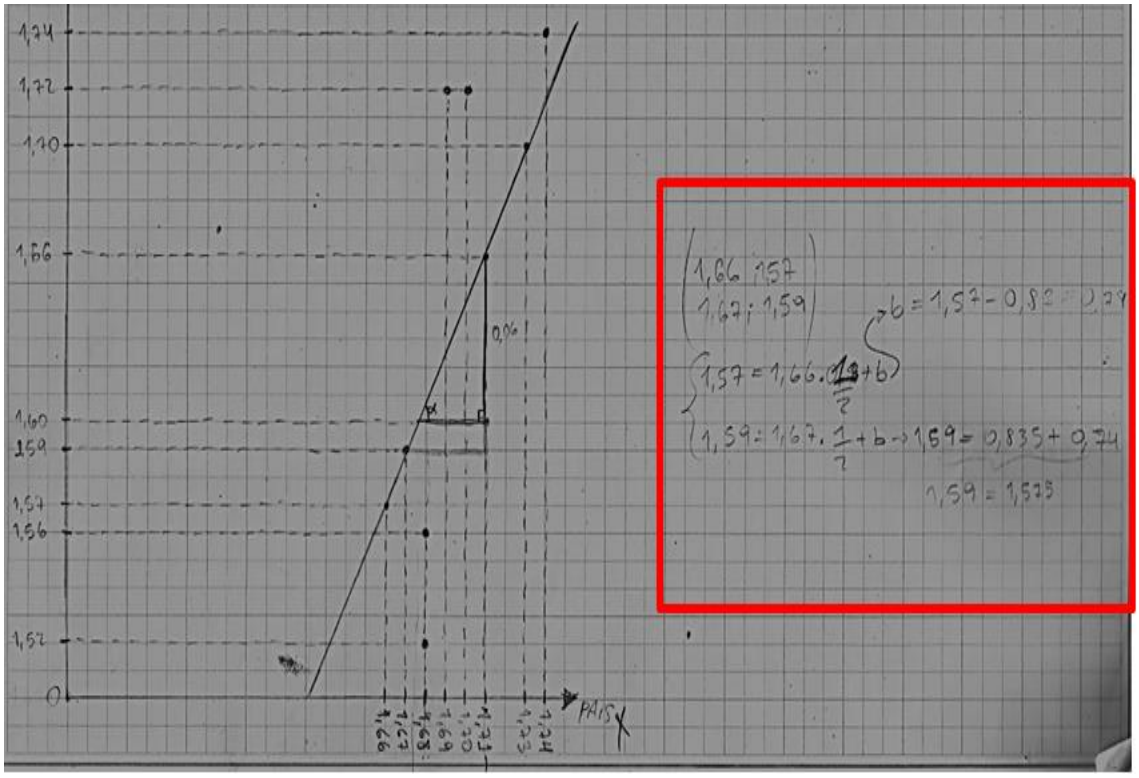
Uma fala que julgamos interessante foi do aluno *PT* que, ao ser perguntado se *a função do gráfico construído pode ser quadrática,* respondeu de forma curiosa:

> *Aluno PT: Professora, pode ser quadrática sim! Porque ó (pegando o piloto e se dirigindo ao quadro branco): Se eu tiver os pontos assim (traçando os eixos x e y e colocando os pontos de forma a se ajustar em uma parábola) então vai passar uma parábola por eles, né?*

Esse momento, na fala do aluno, revela a criatividade por ele alcançada, ao pensar na resposta. Isso só foi possível pelo fato da atividade passar por um processo investigativo que levou os alunos a refletirem sobre suas ações e pensarem em outras hipóteses de solução para a questão apresentada. Trata-se da etapa das conjecturas presente na realização de uma investigação, descrita por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Nessa etapa, o aluno organiza os dados, formula conjecturas e faz afirmações sobre elas. No caso descrito, o estudante reorganizou os pontos do gráfico de forma que fosse possível traçar uma parábola ao invés da reta.

Três alunos foram além do conteúdo proposto como podemos ver na figura 41 a seguir. Eles optaram por encontrar os coeficientes da função fazendo um sistema de equações com dois pontos pertencentes à reta traçada, escolhidos aleatoriamente. Esse fato nos chamou atenção, uma vez que não havíamos dado essa possibilidade de cálculo. Dessa forma, vemos que é possível, com esta atividade, ir além do conteúdo de Função Afim e Estatística básica e trabalhar também outros assuntos, no caso, sistemas de equações lineares.

Figura 41 – Estimativa da função construída pela aluna através de um sistema de duas equações lineares



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Quanto às conclusões acerca da análise dos gráficos, construídos pelos alunos, obtivemos diversas respostas conforme podemos ver nos diálogos a seguir.

> *Aluna PB: Se eu olhar para o gráfico eu vejo que a massa do filho aumenta conforme a da mãe, mas não necessariamente isso vai sempre acontecer porque eu posso ser bem magra e minha mãe gordinha ou vice versa.*
> *Professora: Correto! Por isso que existem esses pontos fora da reta.*

Na conclusão da aluna *PB* podemos verificar outra função pedagógica da História que Miguel (1993) cita como consequências das atividades históricas. Nesta fala, a aluna analisa a conclusão de Galton, afirmando que se trata da generalização de uma ideia que possuem exceções. Dessa maneira, a aluna percebeu que a curiosidade estritamente intelectual leva a generalização e extensão de ideias e teorias. Ela também percebeu que os pensamentos

matemáticos mudam e se desenvolvem ao longo do tempo. Isto é, que a Matemática nunca foi uma ciência pronta e acabada, mas que pode ser desenvolvida, inclusive, pelo aluno.

Já nos diálogos que seguem, fica claro que o professor conduziu os alunos à (re)descoberta do conhecimento incentivando-os a levantarem e testarem hipóteses através das investigações. Esta é uma forte recomendação de Fossa, Mendes e Valdés (2006). Os autores afirmam que esta ação faz com que os alunos pensem com acerto e usem o conhecimento aprendido com eficiência.

> *Aluno AD: Professora, nesse meu gráfico eu posso afirmar que os filhos demoram mais tempo para responder o jogo do que os parentes?*
> *Professora: O que você enxerga no tempo de resposta dos filhos?*
> *Aluno AD: Que está aumentando!*
> *Professora: E dos parentes?*
> *Aluno AD: Que também está aumentando!*
> *Professora: Então o que você pode afirmar?*
> *Aluno AD: Que dos dois aumentam!*
>
> *Aluna GV: Professora, nessa aqui pergunta se a variável x pode ter mais de um correspondente. Eu acho que não, porque só existe uma mãe para um único filho.*
> *Professora: Mas se existir outra mãe que tenha a mesma altura que esta aqui, por exemplo, como você vai colocar o ponto na reta?*
> *Aluna GV: Nesse mesmo valor. Então pode existir mais de um correspondente, né? Só que na reta não porque ela tá em diagonal.*

Ao término da atividade, a turma almejava saber se os gráficos construídos estavam mesmo corretos. Uns concluíram logo que as funções estimadas continham algum erro, pois ao prever a altura/massa de um filho conhecendo a do seu parente, os resultados eram absurdamente altos, como mostrado no diálogo a seguir:

> *Aluna AL: Professora, minha função tá errada!*
> *Professora: Por que você acha que está errada?*
> *Aluna AL: Porque eu fui tentar descobrir a altura do filho quando o pai tinha 2 metros e não deu certo. Não é só substituir o 2 na função?*
> *Professor: É sim. Quanto deu?*

Aluna AL: Deu 4 metros professora. Não pode!

Os erros não foram analisados neste momento, vistos que todos teriam uma nova oportunidade de verificar as construções quando refizessem os cálculos usando o *software* de planilhas eletrônicas, no próximo encontro. Dessa forma, os alunos poderiam, por si sós, reavaliar suas respostas e encontrar os possíveis erros cometidos.

7.2.5 Dia 5 – 23 de julho (90 minutos – 2 aulas)

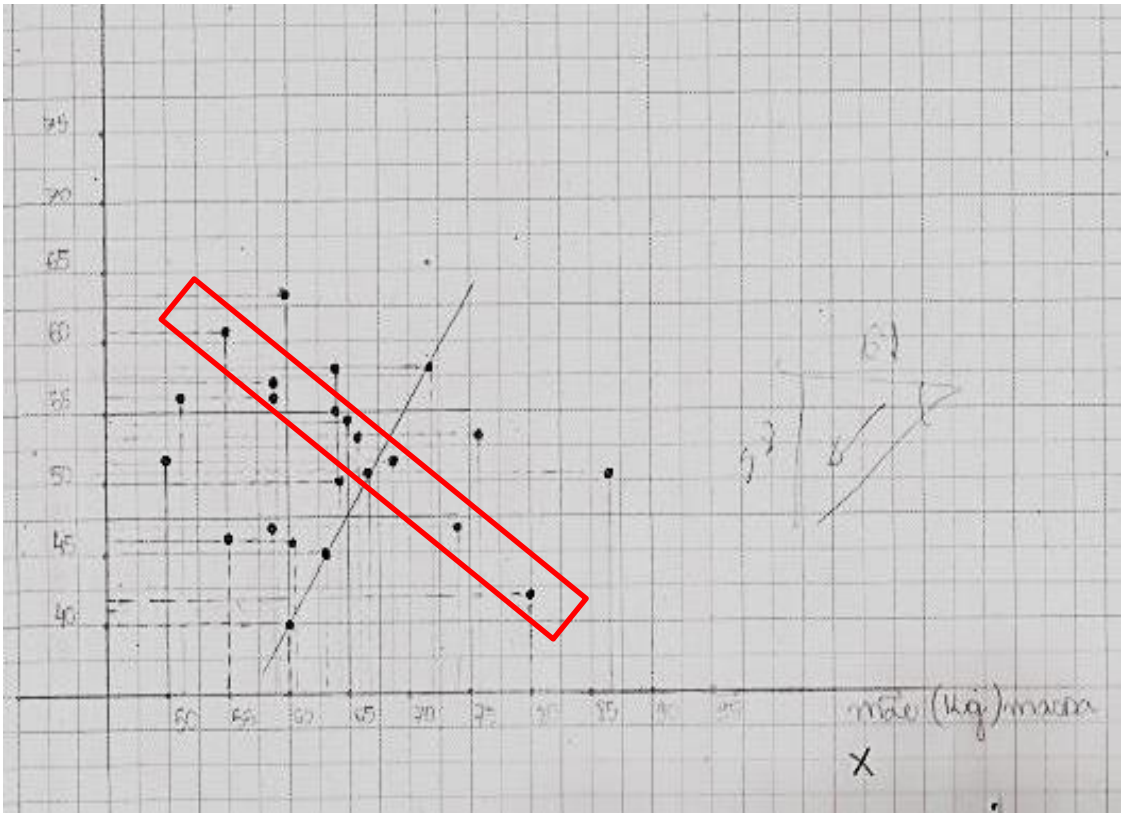
Após a construção manual e análise dos gráficos, voltamos ao laboratório de informática para reconstruí-los. Os alunos utilizaram os mesmos pontos escolhidos anteriormente, usando agora um *software* de planilhas eletrônicas. O passo a passo do processo que deveriam executar no *software* é descrito no quarto encontro da atividade 1. A maioria dos computadores do laboratório possui o *Excel* instalado, mas naqueles que não tem nenhum *software* de planilhas, fizemos as atividades pelo *Excel on-line*.

Um fato que nos chamou a atenção nesta etapa foi que todos os alunos traçaram retas crescentes nos seus gráficos manuais, mesmo quando havia mais pontos que poderiam passar pela reta quando esta fosse decrescente. Foi o caso do gráfico de uma aluna, mostrado na figura 41 a seguir. Visualmente, há mais pontos no sentido decrescente do que o contrário.

Isso se deu pelo fato dos alunos acharem ser impossível a variável estudada (altura, massa e tempo de resposta) decrescer. Ao construírem os mesmos gráficos no *software*, os casos em que o gráfico ficou negativo geraram discussão e descrença, como podemos analisar no diálogo a seguir:

Aluno PT: Professora, o meu gráfico deu 'ruim' aqui, está ficando decrescente.
Professora: E qual o problema de ficar decrescente?
Aluno PT: Mas aí as massas dos filhos vão diminuir.
Professora: Certo. E a massa dos pais?
Aluno PT: Vão aumentar.
Professora: E o que isso quer dizer?
Aluno PT: Que a massa dos pais aumenta enquanto o dos filhos diminui. Hum...

Figura 42 – Ajuste dos pontos a uma reta crescente no gráfico de dispersão



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Como já mencionado, ao construírem os gráficos manualmente e ajustarem os pontos a uma reta, os alunos foram orientados de modo equivocado. Os estudantes traçaram uma reta que passava pelo máximo de pontos possíveis e não no local onde ficaria mais próximo de todos os pontos.

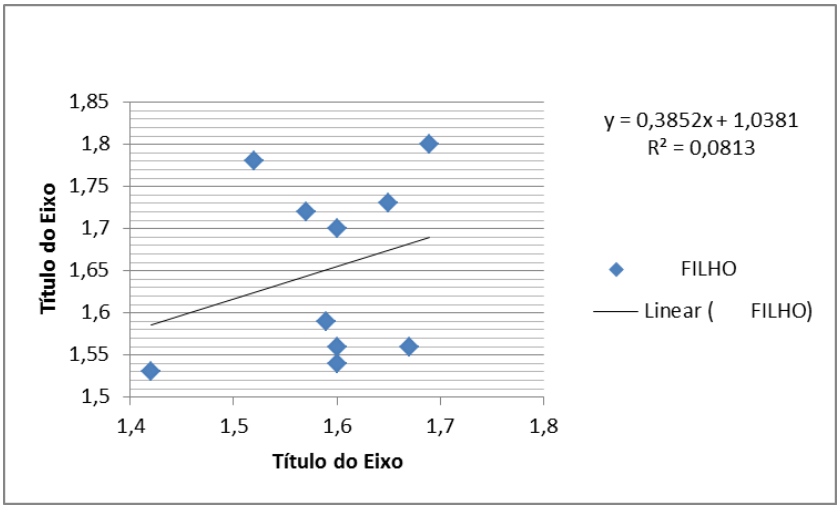
O Método dos Mínimos Quadrados que faz este ajuste matematicamente considera a distância mínima entre todos os pontos dispersos no gráfico. Por este motivo, alguns alunos, ao fazerem o ajuste usando o *software,* se perguntaram o porquê da reta traçada pelo *Excel* não passar por nenhum ponto ou por poucos pontos.

Para que eles não precisassem fazer novamente o gráfico manual, aproveitamos para inserir uma nova atividade de investigação. Deste modo, o aluno *LF* chegou à seguinte conclusão, como é mostrado no diálogo a seguir:

> *Aluno LF: Professora, deu alguma coisa errada aqui. É o mesmo gráfico que eu fiz e os pontos são os mesmos porque eu já conferi. Mas no Excel a reta não tá passando por nenhum ponto.*
> *Professora: E o que você vê em relação à reta e a dispersão dos pontos?*
> *Aluno LF: Eu acho que é porque a reta não tem que passar pelo máximo de pontos, porque se ela passasse por aqui (apontando onde havia 3 pontos colineares) ela ia ficar mais distante deste conjunto de pontos aqui embaixo. Ela tem que ficar tipo no meio de todos os pontos.*

Na figura 43 é possível visualizar o gráfico que o aluno *LF* cita no diálogo anterior.

Figura 43 – Gráfico de dispersão com ajuste linear construído no *Excel*



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Devido a problemas técnicos, acarretados pela ausência de energia elétrica no laboratório de informática por cerca de meia hora, os alunos não tiveram tempo suficiente para terminar a atividade proposta. Assim, demos continuidade na aula seguinte.

7.2.6 Dia 6 – 29 de julho (90 minutos – 2 aulas)

Anteriormente, os alunos investigaram a reta, estimando a melhor função. Agora, em duplas, fizeram o processo inverso, isto é, verificaram se a função estimada pelo *Excel era* condizente com a reta de ajuste dos pontos. Para tanto,

tiveram que responder as seguintes questões presentes nas folhas de atividades:

Questão 19. A função no Excel condiz com a reta ajustada pelo software? Por quê?

Questão 20. A reta ajustada pelo software tem semelhanças e/ou diferenças da construída por vocês? Quais?

Questão 21. A função estimada pelo software tem semelhanças e/ou diferenças da estimada por vocês? Quais?

Questão 22. De acordo com tudo o que foi estudado sobre a teoria eugênica de Galton e os experimentos realizados até agora, vocês concluem que Galton tinha razão ou não?

Questão 23. Na questão 16, vocês fizeram algumas previsões usando a função estimada manualmente. Usem os mesmos dados para fazer as previsões, porém, com a nova função encontrada pelo software.

Todos os alunos que não obtiveram no *Excel* a função condizente com a reta perceberam a diferença e apontaram onde estava o erro.

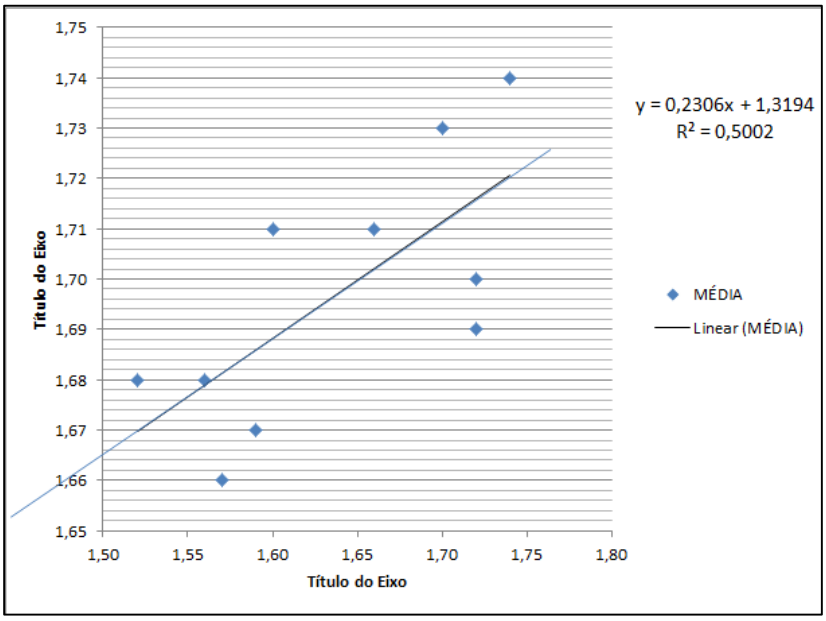
> *Aluna JC: Professora, o Excel errou aqui.*
> *Professora: Por que você acha isso?*
> *Aluna JC: Olha essa função aqui? O b tá 2,5. Nunca que o b vai ser esse valor.*
> *Professora: Por quê?*
> *Aluna JC: Porque a reta não corta y nesse valor.*

Podemos ver aqui como as TIC se fizeram importantes no processo de IM. Os alunos não apenas reproduziram os gráficos construídos manualmente, mas também foram levados a pensar: *Por que o software se comportou de um jeito inesperado e não de outro? Por que a reta não condiz com a função, se foi a máquina que realizou o processo de construção?* Como SILVA; et al (2010, p.46) enfatizam,

> É importante ressaltar que a calculadora não resolve por si só o problema, ela não determina a operação, nem como a mesma deve ser digitada no teclado e, nem também, interpreta o resultado obtido. Todas essas tarefas devem ser realizadas pelo aluno, que é o ser pensante na aprendizagem. Então, atribuir o papel de pensar à calculadora nos parece, na verdade, um grande equívoco.

Nessa perspectiva, o aluno *MK* tentou explicar o valor do termo independente que não condizia com a reta, argumentando que o valor indicava o tamanho real de onde a reta *cortava* o eixo *y* e não o tamanho indicado no eixo. De fato, embora não tenhamos conseguido verificar esse fato, fizemos a projeção da reta até o eixo *y*. Em todos os casos em que o valor do termo independente não condizia com a função de ajuste, acontecia o que o aluno *MK* havia relatado com suas observações. Na figura 44 a seguir, temos um desses casos.

Figura 44 – Gráfico de dispersão ajustado no *Excel* em que a função exibida não condiz com a reta de ajuste



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Observe ao fundo do gráfico, na figura 44, as linhas de grade que dividem o plano cartesiano em várias partes iguais. Há 10 divisões iguais com linhas de maior espessura. Em cada divisão há linhas mais finas que subdividem em 5 outras partes iguais. Se considerarmos cada conjunto de 5 subdivisões como 1 unidade de valor, a reta, ao ser projetada até o eixo *y*, passa por este eixo no valor aproximado de 1,3. Na mesma figura podemos verificar que o valor do termo independente na função estimada pelo *software* é o mesmo que o do

tamanho da linha considerada (distância da origem até onde a reta da função passa pelo eixo *y*).

O fato é que cada Função Afim estimada pelo *Excel* nem sempre condiz com a reta de ajuste dos pontos. Isso porque, em alguns casos, a função somente é válida apenas para o intervalo de dados coletados, sem garantia de crescimento linear fora desse intervalo conhecido. Nestes casos, o conjunto de pontos traçados se ajusta melhor a uma curva e, assim, necessita de um ajuste não linear, isto é, usando funções exponenciais, logarítmicas ou outras que não sejam a Função Afim.

Julgamos esse fato como extremamente positivo, pois os alunos ficaram intrigados com o *erro* mostrado pela *máquina* e quiseram a todo custo buscar uma resposta que justificasse o ocorrido, já que, para eles, a máquina nunca erra. Foi um momento de forte IM que fizeram os alunos criar diversas conjecturas e realizar inúmeros testes. Houve um grupo de estudantes que foi em cada máquina fazer a contagem das divisões do gráfico. O objetivo deles era encontrar algum caso que *refutasse a teoria do aluno MK*.

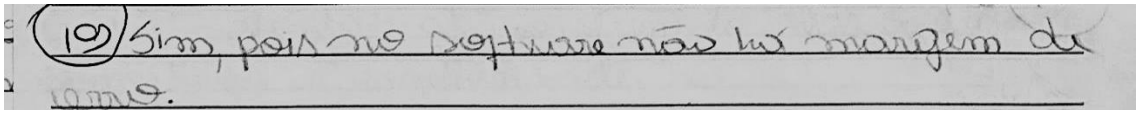
Mais uma vez comprovamos as potencialidades da IM e das TIC em nossas atividades históricas, levando os alunos a pensarem com acerto por meio de investigações, levantamento de hipóteses e testes. Ressaltamos, também, que esta faceta investigativa foi mais forte quando os alunos fizeram uso das tecnologias. O que nos reafirma que as TIC facilitam, de fato, a análise dos resultados e reservam um tempo maior para a reflexão e conclusão.

Pensamos, também, que este *erro* pode ser aproveitado para estudar outras funções, já que os gráficos geram pontos que se ajustam a casos não lineares. Isso nos mostra que o produto educacional por nós elaborado pode abranger, também, outros tipos de funções, caso seja de interesse do docente que o utilizar.

Ainda sobre os gráficos do *software* que não eram condizentes com a função ajustada, podemos pensar que quando o aluno não se atenta ao *erro* produzido no recurso tecnológico porque acredita fielmente na máquina, as TIC ganham uma desvantagem para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Mas, na realidade, a máquina irá executar o comando que o usuário der. Como já mencionado anteriormente por SILVA; et al (2010), o usuário é que é o ser pensante, que deve julgar se o procedimento foi correto ou não. Ao

perguntarmos aos alunos se a função exibida no *software* condizia com a reta de ajuste do programa, por exemplo, mais de 6 alunos responderam que sim, mesmo não sendo, justificando que não podia estar errado uma vez que foi feito no computador, onde há precisão. A aluna *LG* afirmou que no *software* não há margem de erro, como é mostrado na figura 45.

Figura 45 – Resposta da aluna *LG* para a questão 19 sobre a função estimada no Excel estar condizente com a reta de ajuste



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Houve casos, ainda, que a função condizia com a reta do *software* e que os pontos eram os mesmos traçados manualmente. No entanto, os alunos não entendiam o porquê da função estimada manualmente diferenciar tanto da feita pelo programa. Ao pedir para pensarem na proporção dos eixos, os alunos perceberam que, embora tivessem tido a preocupação de traçar os valores no eixo, proporcionalmente entre si, não tiveram o mesmo cuidado em fazer isso entre a origem e o primeiro valor. Assim, no gráfico manual como o da aluna *MY*, exibido a seguir, na figura 46, o coeficiente linear é menor que zero. No entanto, no *Excel* este valor ficou positivo.

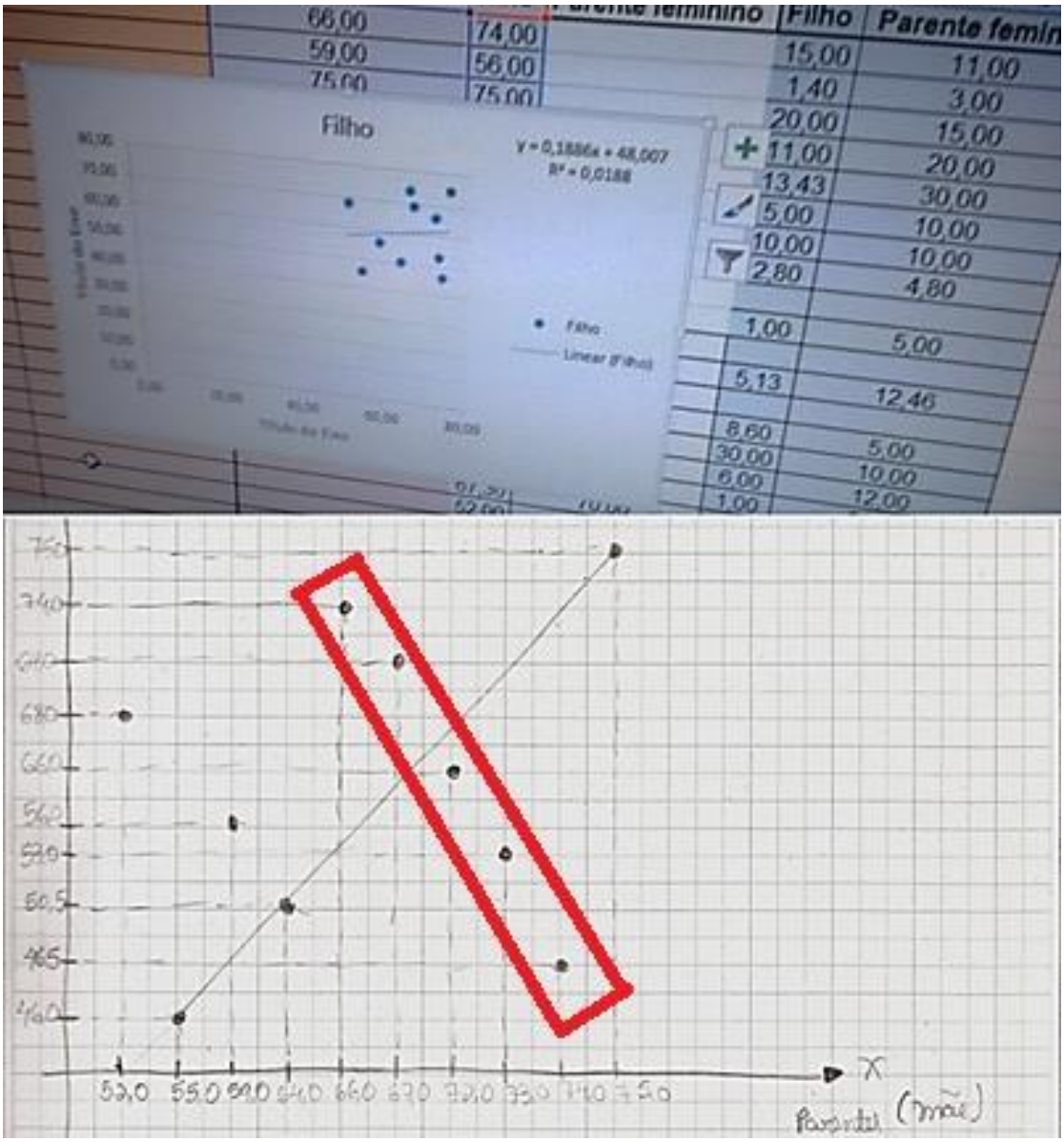
A própria aluna percebeu o erro após alguns minutos analisando o gráfico e conversando com a professora, conforme o diálogo a seguir:

> *Aluna MY: Por que o b ficou positivo, Professora? Eu fiz tudo certo e era para ficar negativo.*
> *Professora: Veja como estão os números no eixo y. Você fez proporcional?*
> *Aluna MY: Fiz sim.*
> *Professora: Mas desde o começo você fez proporcional?*
> *Aluna MY: Ah, não... Eu deixei o 52 bem próximo porque senão ia começar lá na frente.*
> *Professora: E como tá no Excel?*
> *Aluna MY: Tá tudo igualzinho. Então foi por isso.*

Ainda na figura 46 podemos perceber o que já foi comentado antes acerca dos alunos sempre construírem retas crescentes mesmo quando lhes

parece mais viável a reta decrescente. Na figura, destacamos cinco pontos aparentemente colineares que poderiam fazer parte de uma reta decrescente.

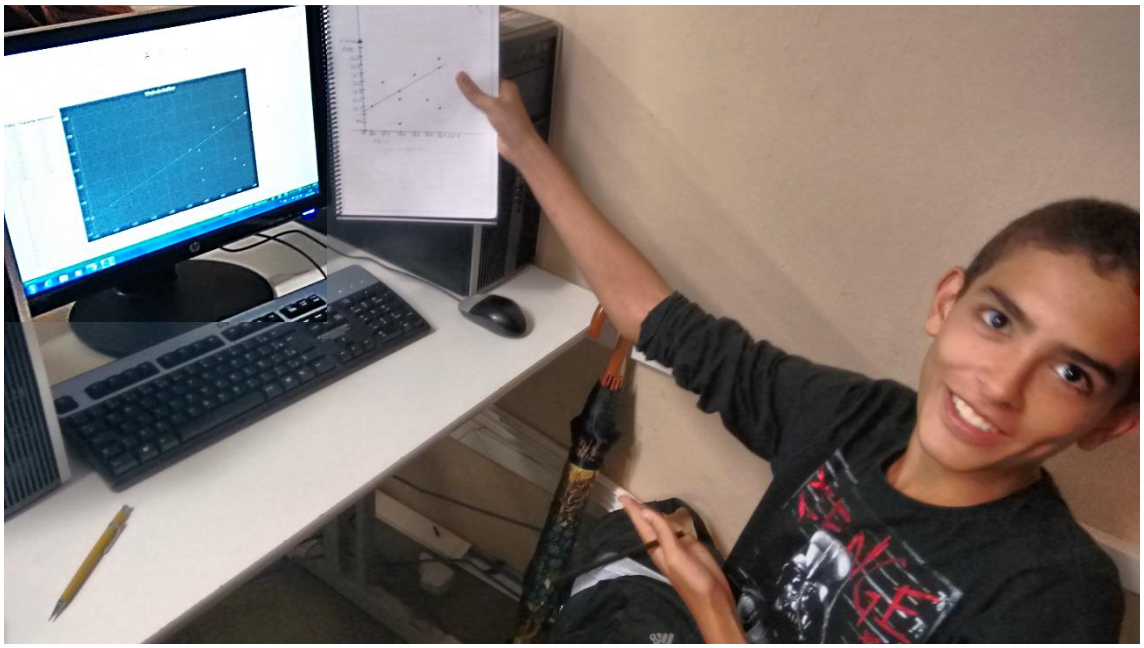
Figura 46 – Gráfico construído no *Excel* e manualmente pela aluna *MY*



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Em contrapartida a essas diferenças, também houve alunos cuja reta traçada manualmente e a construída no *software* ficaram, na fala do aluno *PL*, *idênticas*. Observemos a figura 47 a seguir.

Figura 47 – Semelhança do gráfico manual com o do *Excel*

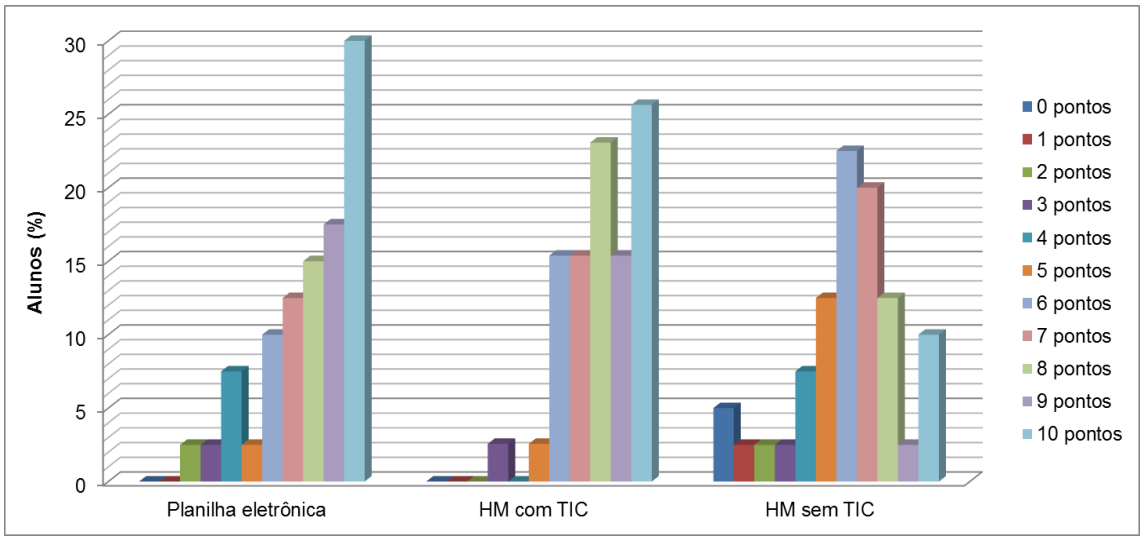


Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Os coeficientes das duas funções do aluno *PL* (os estimados manualmente e os ajustados pelo *software*) divergiam um pouco, porém, tinham os mesmos sinais. Manualmente, o aluno encontrou $y = 1,2x + 6$ e o *Excel* mostrou $y = 0,8011x + 0,3583$. Mesmo assim, o aluno se mostrou satisfeito e quis registrar a comparação como é mostrado na figura 47.

No questionário final, aplicado com os alunos, 7,8 pontos foi a média atribuída ao grau de satisfação da turma com o uso de planilhas eletrônicas. Neste quesito, 30% dos alunos atribuíram nota dez (completamente satisfeitos), como é mostrado no gráfico 8 a seguir. No mesmo gráfico, é exibido o grau de satisfação ao estudar a HM com e sem o apoio do recurso tecnológico (computador, celular, *software* de planilhas eletrônicas, internet). A média foi maior (dois pontos a mais, resultando em 8 pontos) à favor do uso das TIC como apoio à HM. Além da média elevada, também houve um desvio padrão menor, mostrado no gráfico 8. Isso quer dizer que a turma se mostrou mais homogênea ao atribuir as notas maiores neste item.

Gráfico 8 – Grau de satisfação dos alunos quanto ao uso do *software*; da HM sem o auxílio das TIC e da HM com o auxílio das TIC



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Em suma, comprovamos que o uso das TIC também gera interesse e motivação na maioria dos alunos. Envoltos em um processo investigativo, os alunos pensam de forma consciente e, por consequência, aprendem.

7.2.7 Dia 7 – 30 de julho (90 minutos – 2 aulas)

Para o encerramento da atividade 1, não tivemos tempo hábil para propor que os alunos elaborassem uma apresentação a fim de socializar os resultados encontrados com a turma. Desse modo, a pesquisadora preparou uma apresentação de *slides* contendo a sequência de perguntas de toda a atividade. Para cada pergunta, selecionamos algumas respostas dos alunos (as melhores e/ou as que continham algum erro/equívoco). Tais *slides* encontram-se disponíveis no apêndice *G* desta dissertação.

Esta ação foi consequência da sugestão de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) ao afirmarem que

> O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados dos processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.41)

Neste sentido, exibimos a apresentação neste dia, sem revelar o autor de cada resposta selecionada. Primeiramente exibimos a pergunta, destinamos um tempo de discussão geral com a turma sobre as possíveis respostas e depois exibimos as respostas selecionadas, observando as diferenças, discutindo qual era a melhor, qual a que continha algum erro ou equívoco.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam ainda que, sem essa etapa de discussões, pode-se correr o risco de perder o sentido da investigação. É fundamental que o professor incentive os alunos a discutirem sobre seus resultados e assim desenvolvam suas capacidades de se comunicar matematicamente. Além disso, os alunos valorizam mais o trabalho realizado quando sabem que serão expostos à turma. De fato, percebemos que embora estivesse previsto a socialização, pois havíamos inserido no cronograma entregue, observamos que os alunos ficaram muito empolgados ao ver suas respostas selecionadas (mesmo quando a seleção era porque havia cometido um erro ou equívoco). Isso foi comprovado na fala de alguns alunos, semelhantes a da aluna *DB* e do aluno *AD*, ao entregar a segunda atividade. Veja a transcrição a seguir desse momento:

> *Aluna DB: Professora, agora eu fiz tudo certinho! Quero só ver se a minha resposta não vai ser mostrada nos slides.*
>
> *Aluno AD: Professora, eu fui bem criativo nas respostas. A senhora tem que mostrar nos slides, viu?*

Foi nesta socialização que a aluna responsável pela resposta equivocada, mostrada na figura 28, e o aluno que definiu a reta da função como média, exibida na figura 35, tiveram oportunidade de corrigir os erros e responderem de forma correta.

Ao fim dessa apresentação, orientamos oralmente os alunos quanto à elaboração do relatório referente à primeira atividade. Tal relatório deveria ser entregue por e-mail ou pessoalmente, até a próxima aula.

Os resultados desses e dos relatórios da segunda atividade serão vistos no tópico 7.3 do presente texto.

7.2.8 Dia 8 – 5 de agosto (90 minutos – 2 aulas)

Neste dia, damos início a segunda atividade histórica proposta (ver apêndice *E*) dentro da sala de aula. Na primeira parte desta atividade, objetivamos que os alunos aplicassem os conhecimentos construídos na atividade anterior sobre funções e Estatística para relacionar as medidas do corpo humano com as medidas das roupas, calçados e acessórios.

Para tanto, exibimos uma reportagem do Jornal Hoje, da TV Globo, de 5 de novembro de 2014, cuja manchete é: *Pesquisadores mapeiam medidas do corpo dos brasileiros*[25]. Na reportagem fica clara a importância de estabelecer um padrão de medidas e como elas se relacionam com o corpo de cada indivíduo. Vale ressaltar, aqui, a utilização das TIC em prol do trabalho com os alunos.

Após a reportagem e os esclarecimentos sobre o significado de *Estudo Antropométrico* (estudo das medidas do corpo humano), os alunos colocaram em prática o que aprenderam com a (re)criação do experimento de Galton. Voltaram-se, agora, às necessidades do século XXI, isto é, estabelecendo uma relação entre as medidas do corpo humano e das roupas, calçados e acessórios.

A turma foi dividida em grupos de quatro pessoas. Os alunos foram a uma loja de móveis vizinha a escola para buscar fitas métricas de papel que eram distribuídas. Ao voltarem, escolheram uma variável e encontraram as medidas dos colegas de turma e dos respectivos acessórios, anotando as informações em uma tabela, conforme orientados na pergunta 1 da atividade 2, mostrada a seguir:

Questão 1. Quais medidas do corpo humano são importantes nos dias atuais para produção de roupas, calçados e acessórios? Forme um grupo com mais 2 ou 3 colegas da sua turma, escolham uma variável/medida importante do corpo humano (como circunferência da cintura, da cabeça ou do busto, por exemplo) para ser medida e colete essas medidas do corpo, bem como uma outra variável/medida da roupa/calçado/acessório que cada aluno da sua turma usa. Registre os dados no papel para posterior análise.

---

[25]Disponível no link: http://globotv.globo.com/rede-globo/jornal-hoje/v/pesquisadores-mapeiam-medidas-do-corpo-dos-brasileiros/3744433/

Na figura 48, selecionamos algumas fotos do momento das medições.

Figura 48 – Momento de coleta de dados das medidas dos alunos (Estudo Antropométrico)

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

À esquerda da figura, na parte superior, as medidas escolhidas foram busto e número da camisa. Na parte inferior, ainda à esquerda, um dos grupos mediu o tamanho do pé e relacionou com o número do calçado. Por fim, à direita da figura, o grupo da aluna *JM* resolveu medir a circunferência do dedo e fazer uma relação com os números dos anéis, encontrados numa pesquisa rápida na internet (uso das TIC).

Cinco grupos escolheram as medidas busto-camisa; dois grupos escolheram pé-sapato; dois outros escolheram quadril-calça; e apenas um grupo escolheu dedo-anel e outro escolheu palma-braço (modificado posteriormente).

Como as medidas das camisas dos alunos eram por letras (P representa pequena, M representa média e G representa grande), os alunos tiveram dificuldades de responder às perguntas posteriores e estimar a função, pois precisavam de duas medidas quantitativas.

Alguns grupos usaram os conhecimentos prévios que tinham dessa relação e fizeram a transformação das letras em números de forma autônoma, estabelecendo o número 44 para o tamanho P, 48 para M e 52 para G.

Outros grupos ficaram intrigados com essa relação e quiseram saber o porquê desses números. O aluno *MK*, por exemplo, demonstra sua inquietude no diálogo transcrito a seguir:

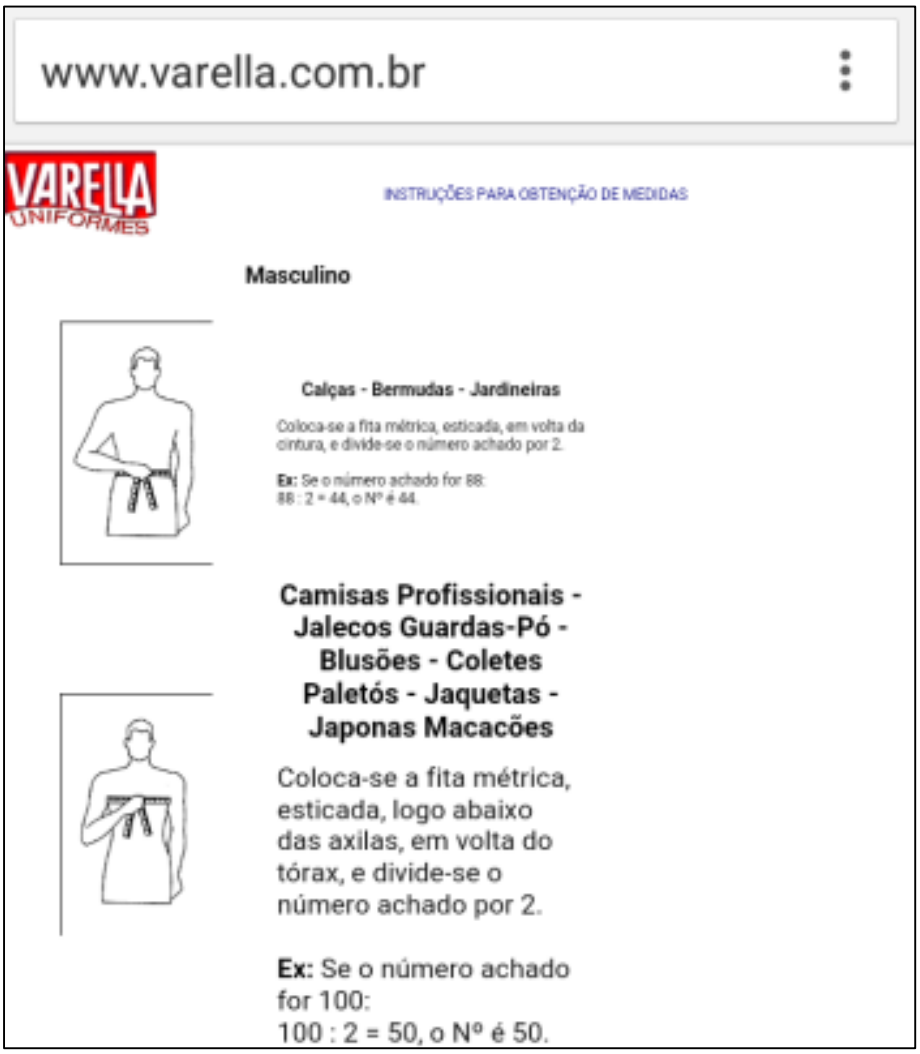
> *Aluno MK: Professora, por que eu posso dizer que P é igual a 44? Da onde vem esse número?*
> *Professora: Por que você não faz uma pesquisa na internet?*
> *Aluno MK (retornando da pesquisa): Ahhh, professora. Encontrei. Tem um monte de coisas. Em um dos casos, pra homens, ele pega a fita métrica, mede em baixo das axilas e o número é dividido por 2. Se for 100, por exemplo, o tamanho da camisa é 50.*
> *Professora: Hum... Muito bem! Agora você vai encontrar a sua função, de acordo com os dados coletados, para estabelecer seu próprio método de encontrar essas medidas.*

A explicação dada pelo aluno *MK* foi retirada do site de uma empresa de uniformes (*http://www.varella.com.br/medidas.htm*) como é mostrado na figura 49 a seguir (uso das TIC).

A atitude do aluno *MK* em se questionar acerca da relação das letras com os tamanhos numéricos de cada peça de roupa vai ao encontro do que Campos, Wodewotzki e Jacobi (2013) mencionam como habilidade adquirida ao estudar Estatística.

O fato do estudante não tratar passivamente as informações que lhe são disponibilizadas significa dizer que o aluno possui a habilidade de avaliar criticamente uma informação. Isso vai além dos conhecimentos matemáticos, estatísticos e do contexto do problema. O estudante, aqui, foi capaz de pensar sobre o que aprendeu e estava aprendendo, de forma crítica.

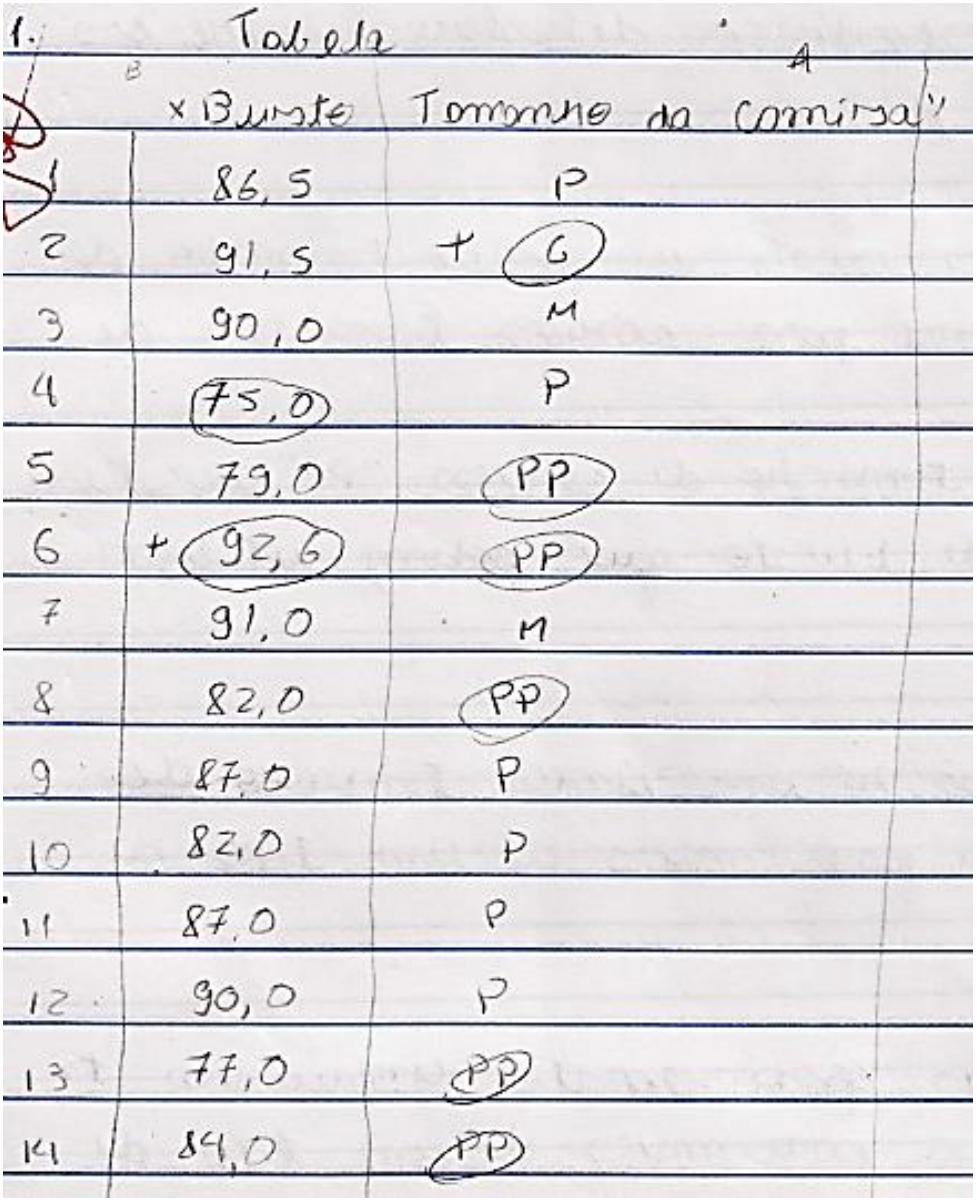
Figura 49 – *Print screen* da tela com o resultado da pesquisa sobre padrões de medidas de roupas



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

O grupo que escolheu medir a circunferência do dedo relacionou com os números de anéis encontrados em um site de pesquisa. O que escolheu medir a palma da mão e relacionar com o comprimento do antebraço, ficou confuso ao estabelecer uma relação de dependência entre essas duas medidas. Para este grupo, ambas eram dependentes uma da outra e não fazia sentido que uma das medidas fosse independente. Assim, foi decidido, posteriormente, mudar as variáveis escolhidas para medida da palma da mão e tamanho de luvas. Os registros foram organizados em tabelas como da imagem 50.

Figura 50 – Tabela de medidas do busto de 15 alunos da turma e seus respectivos tamanhos de camisas



1. Tabela

	Busto	Tamanho da camisa
1	86,5	P
2	91,5	G
3	90,0	M
4	75,0	P
5	79,0	PP
6	92,6	PP
7	91,0	M
8	82,0	PP
9	87,0	P
10	82,0	P
11	87,0	P
12	90,0	P
13	77,0	PP
14	84,0	PP

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

A aula terminou com as medidas todas coletadas por cada grupo e a construção da tabela relacionando as medidas do corpo com o tamanho do acessório, calçado ou roupa.

No caso da figura 50, o grupo mediu o busto e relacionou com o tamanho da camisa, por letras. Nesta tabela, podemos observar que todas as medidas PP (tamanho pequeno) estão circuladas pelo grupo. Isso foi feito no dia posterior a coleta. O objetivo da atividade era que cada grupo investigasse seus registros a fim de encontrar exemplos de relação que não determinava função; exemplos de

função injetora; de função sobrejetora e de função bijetora. Ainda na figura 50, anterior, os alunos encontraram um exemplo de função sobrejetora, visto que há vários elementos distintos na coluna independente (medida do busto) para um mesmo tamanho de camisa (PP). Trata-se de um novo momento investigativo que iremos detalhar no próximo subtópico, referente ao dia 9.

7.2.9 Dia 9 – 6 de agosto (90 minutos – 2 aulas)

O segundo encontro referente à última atividade ainda aconteceu na sala de aula. Os grupos, agora, precisaram analisar a tabela construída no encontro anterior e responder os itens de *a* a *g* da questão 2, que transcreveremos aos poucos neste tópico, a medida que iremos relatando as respostas de cada uma.

Apesar dos alunos discutirem as respostas de cada item em seus grupos, cada aluno respondeu no seu próprio caderno as suas conclusões.

No item *a*, fizemos o seguinte questionamento:

a) Existe uma relação de dependência entre as variáveis? Observem se uma variável depende da outra e, em caso positivo, quem é a variável dependente e quem é a variável independente de seus estudos? Caso não, justifique.

Praticamente todos os alunos responderam corretamente essa pergunta, não só identificando a relação de dependência, mas também diferenciando a variável dependente da independente. O único que não conseguiu enxergar essa relação foi o aluno *LT* que havia acabado de chegar de uma viagem e não participou da primeira atividade desenvolvida.

Percebemos que os conceitos de função e dependência de variáveis ficaram bem claros para os estudantes, visto que 72% dos alunos definiram corretamente Função Afim na avaliação final (ver apêndice *F*) e os demais 28%, embora não tenham definido, citaram todos os elementos que constituem e representam uma Função Afim, de forma correta. Também observamos que o aprendizado desses conceitos se fez presente nos relatórios entregues após o término da segunda atividade. Na figura 51 a seguir é possível ver trechos de relatórios de dois grupos distintos que comprovam a nossa observação:

Figura 51 – Trechos do segundo relatório entregue de dois grupos distintos

Meu grupo utilizou as variáveis: medida do ombro (variável independente), portanto x, e o tamanho da blusa (variável dependente), sendo f(x), colhendo as medidas dos ombros e o tamanho da blusa de 10 alunos. Conseguimos, por conseguinte, relacionar as duas variáveis, pois uma depende da outra, construindo assim a função. O gráfico e a função foram construídos no programa Excel, tendo assim uma facilidade na construção dos mesmos.

Observando os dados obtidos na pesquisa e o gráfico tomamos algumas conclusões:

1. **A variável "tamanho do camisa" possuía uma relação de dependência quando a variável "tamanho do tórax".**

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

O item *b* solicitava que o aluno representasse em uma expressão com intervalos cada conjunto de variáveis (medida do corpo e medida do acessório). Também perguntava se eles tinham conhecimento acerca do nome dado a esses dois conjuntos.

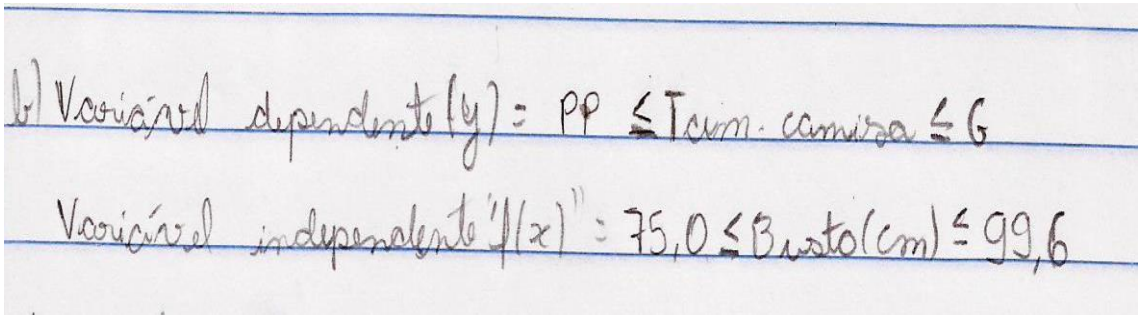
b) Vejam na tabela qual o menor e qual o maior valor do conjunto de cada variável. Cada um desses dois valores (o menor e maior) representa o limite mínimo e máximo de valores que a variável assume, de acordo com os dados que sua turma coletou. Por exemplo, se na coleta das alturas dos alunos da turma, a maior altura registrada foi 2,3 m e a menor foi 1,55 m, então, as alturas h da pesquisa estão entre 2,3 m e 1,5 5m, ou seja, 1,55 ≤ h ≤ 2,3.

Diante do exposto, identifique os limites máximos e mínimos das duas variáveis estudadas por seu grupo.

Qual o intervalo de medidas que pertence a cada variável? Você sabia que na Matemática existe um nome específico para cada um desses intervalos?

Todos os alunos representaram o intervalo de maneira correta. O grupo que ainda permaneceu com as medidas das camisas em letras também fez uma adaptação, como é mostrado na figura 52 a seguir. Tal atitude nos remete à *criatividade* citada por Miguel; et al (2009) que os alunos adquirem ao trabalharem com a História.

Figura 52 – Aluno criando uma expressão que representa o intervalo de medidas dos bustos e das camisas



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

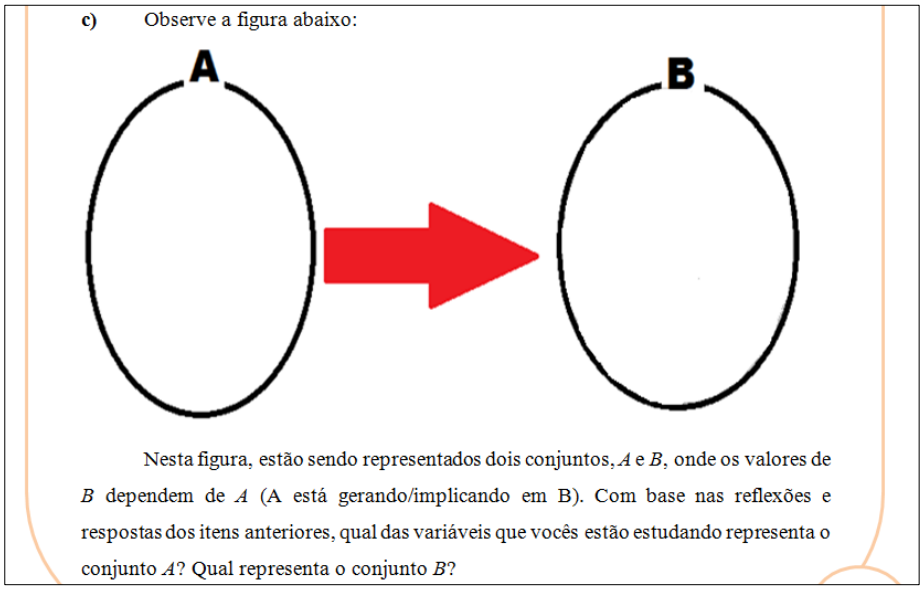
Ainda sobre este aspecto criativo, todos os alunos confirmaram não saber o nome que se dá a cada um dos dois conjuntos estudados. Mas a fala de um dos alunos, em especial, nos chamou a atenção sobre isso. Observe a transcrição a seguir:

> *Aluno LT: Professora, o nome desses conjuntos não é Reflexo e Imagem?*
> *Professora: Não...*
> *Aluno LT: É sim, tem tudo a ver ó (apontando para o diagrama de dois conjuntos distintos construídos por ele). Você tem a imagem do conjunto aqui (apontando para o primeiro conjunto) e do outro lado aparece o reflexo no espelho (apontando para o segundo conjunto).*
> *Professora: A ideia é exatamente esta, mas os nomes não são estes.*
> *Aluno LT: Hum... Mas faz sentido o que eu disse, não faz?*
> *Professora: Faz sim!*

A pergunta do item *c* é mostrada na figura 53 a seguir. O discente precisava preencher os dois conjuntos com as medidas coletadas. Mas precisava se atentar em qual conjunto ficaria as medidas dependentes e em qual ficaria as medidas independentes.

Apenas o aluno *LT* respondeu que os tamanhos dos acessórios eram as variáveis independentes e o tamanho do corpo era dependente, como mostrado na figura 54 (isso será retomado no momento da socialização dos resultados e, por isso, o aluno não foi estimulado a corrigir o equívoco imediatamente).

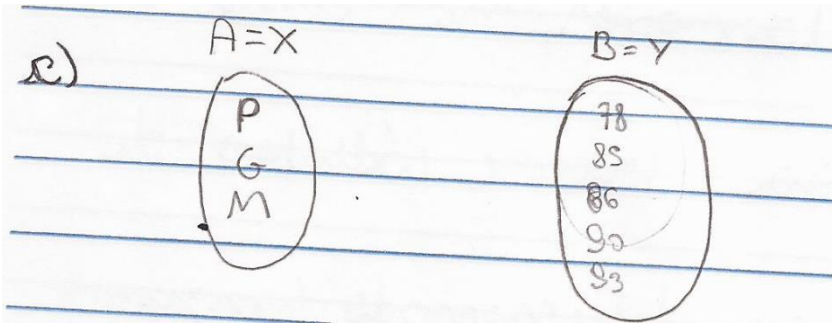
Figura 53 – Pergunta do item *c* da questão 2 da segunda atividade proposta



Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

Os demais alunos acertaram a resposta do item, inserindo no conjunto *A* as medidas do corpo e, no conjunto *B*, as medidas das roupas/calçados/acessórios (que dependem das medidas do corpo humano para serem produzidos).

Figura 54 – Resposta do aluno *LT* ao item *c* da questão 2 da segunda atividade



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Enfatizamos o nosso intuito de buscar que o aluno reflita e aprenda o significado dos conceitos antes de chegar ao formalismo matemático. Tomamos cuidado para que nenhuma etapa na construção (ou ressignificação) desses

conceitos seja omitida do processo. Isso se faz importante porque, segundo Medeiros (2005),

> A imposição precoce e a apresentação exclusiva do formalismo queimam etapas necessárias na estruturação do pensamento do aluno e tentam veicular uma Matemática destituída de sua história. [...] Trata-se, sim, de negar a apresentação do simbolismo, sem a explicação das ideias, visto como mágica pelo aluno. (MEDEIROS, 2005, p.19-20)

Por este motivo, nesta atividade, os alunos partiram da coleta, organização, interpretação e análise dos dados (medidas do corpo e acessórios) para somente depois separá-los em tipos de variáveis, tipos de conjuntos, tipos de funções, dentre outras classificações matemáticas.

São nos itens de *d* a *g*, da primeira questão da segunda atividade, que estes conceitos serão explorados com mais afinco. Porém, ainda sem exigência de notações e termos matemáticos. Tais itens são transcritos a seguir:

d) Existe alguma medida pertencente ao conjunto A que se corresponda, ao mesmo tempo, com dois ou mais outros valores pertencentes ao conjunto B?

e) Existe alguma medida pertencente ao conjunto B que se corresponda, ao mesmo tempo, com dois ou mais outros valores pertencentes ao conjunto A? Pode existir? Citem um exemplo, em caso positivo. Em caso negativo, justifique.

f) Existe alguma medida/valor pertencente ao conjunto A que não tenha correspondente em B? Pode existir?

g) Existe alguma medida/valor pertencente ao conjunto B que não tenha correspondente em A? Pode existir? Citem um exemplo, em caso positivo. Em caso negativo, justifique.

Exatamente 90% dos alunos responderam de forma positiva ao item *d*, afirmando que existem dois ou mais itens no domínio *A* (medida do corpo) que possuem o mesmo correspondente no conjunto do contradomínio *B* (medida do acessório). De fato, na tabela desses grupos sempre havia pelo menos um exemplo onde isso acontecia. Os alunos que responderam negativamente não tinham exemplos dessa ocorrência em suas tabelas.

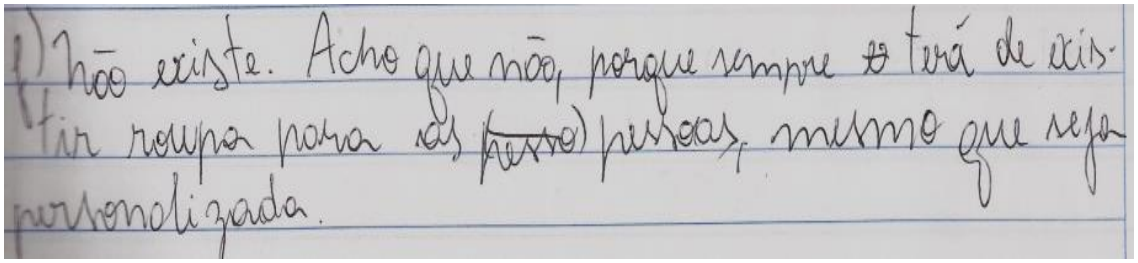
Como já posto, pretendíamos voltar a este e aos demais itens no momento da socialização dos resultados. Assim, não chamamos a atenção ou exploramos com mais afinco o assunto imediatamente à identificação das respostas

divergentes. Nosso objetivo principal, neste momento, era fazer com que os alunos investigassem, em seus dados, cada situação possível de função bijetora, injetora, sobrejetora e relação. Posteriormente, foram apresentados aos estudantes os nomes e definições formais de cada conceito, juntamente com os exemplos reais encontrados pela turma.

Em resposta ao item *e*, 85,7% dos discentes afirmaram ter duas medidas pertencentes ao conjunto *B* que se correspondiam a um mesmo valor pertencente ao conjunto *A*. De fato havia em suas tabelas. Deste percentual, 4 pessoas de um mesmo grupo acrescentaram à resposta que, embora essa correspondência acontecia na tabela, não poderia ocorrer em uma função. Lembramos, aqui, que uma função é definida como uma relação entre dois conjuntos distintos e não vazios, *A* e *B*, que associa cada variável *x* em *A*, a um único *y* em *B*. Assim, fica claro, no grupo supracitado, que os estudantes conseguiram diferenciar uma função de uma relação.

Já no item *f*, a maioria dos alunos (87,9%) observou que não existia e nem poderia existir nenhum elemento no domínio *A* sem correspondente, utilizando como um dos argumentos a resposta de um dos grupos mostrada na figura 55 a seguir.

Figura 55 – Resposta de um dos grupos para o item *f* da segunda questão da atividade 2


f) Não existe. Acho que não, porque sempre terá de existir roupa para as ~~pessoa~~ pessoas, mesmo que seja personalizada.

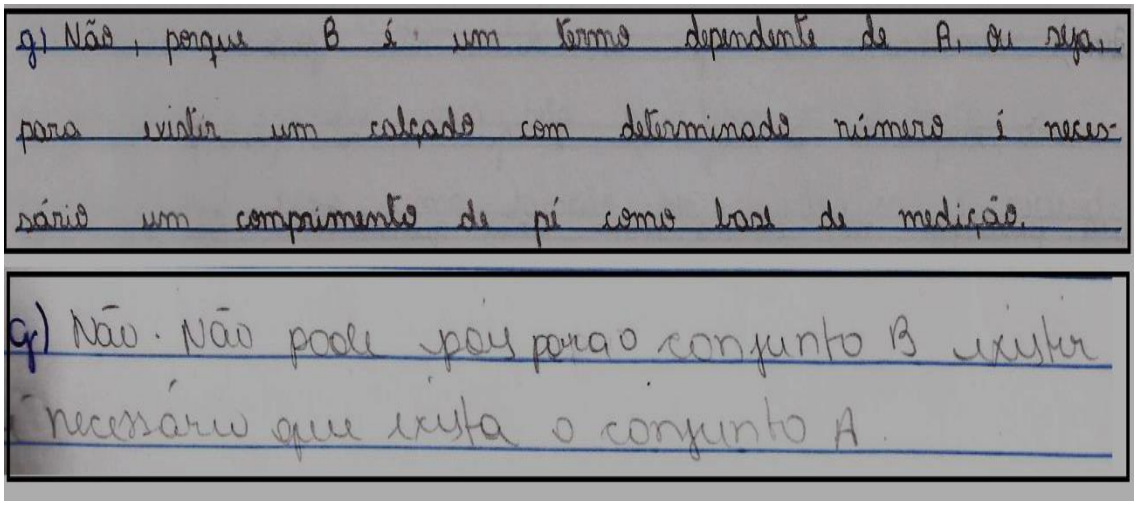
Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Dos restantes 12,1%, o aluno *LT* respondeu positivamente porque havia trocado os valores dos conjuntos, como mostramos anteriormente e três alunos não demonstraram ter compreendido a pergunta, gerando respostas sem coesão, impossíveis de ser analisadas.

Por fim, no item *g* conseguimos extrair uma relevante conclusão. Pelo fato dos alunos terem internalizado, na primeira atividade, o conceito de função como

uma relação de dependência entre duas variáveis, 88,2% dos alunos responderam o último item da questão 2 de forma negativa. Todas as justificativas diziam respeito à relação de dependência das variáveis, como mostrado na figura 56.

Figura 56 – Respostas negativas de dois alunos para o item *g* na segunda questão da atividade 2


g) Não, porque B é um termo dependente de A, ou seja, para existir um calçado com determinado número é necessário um comprimento de pé como base de medição.

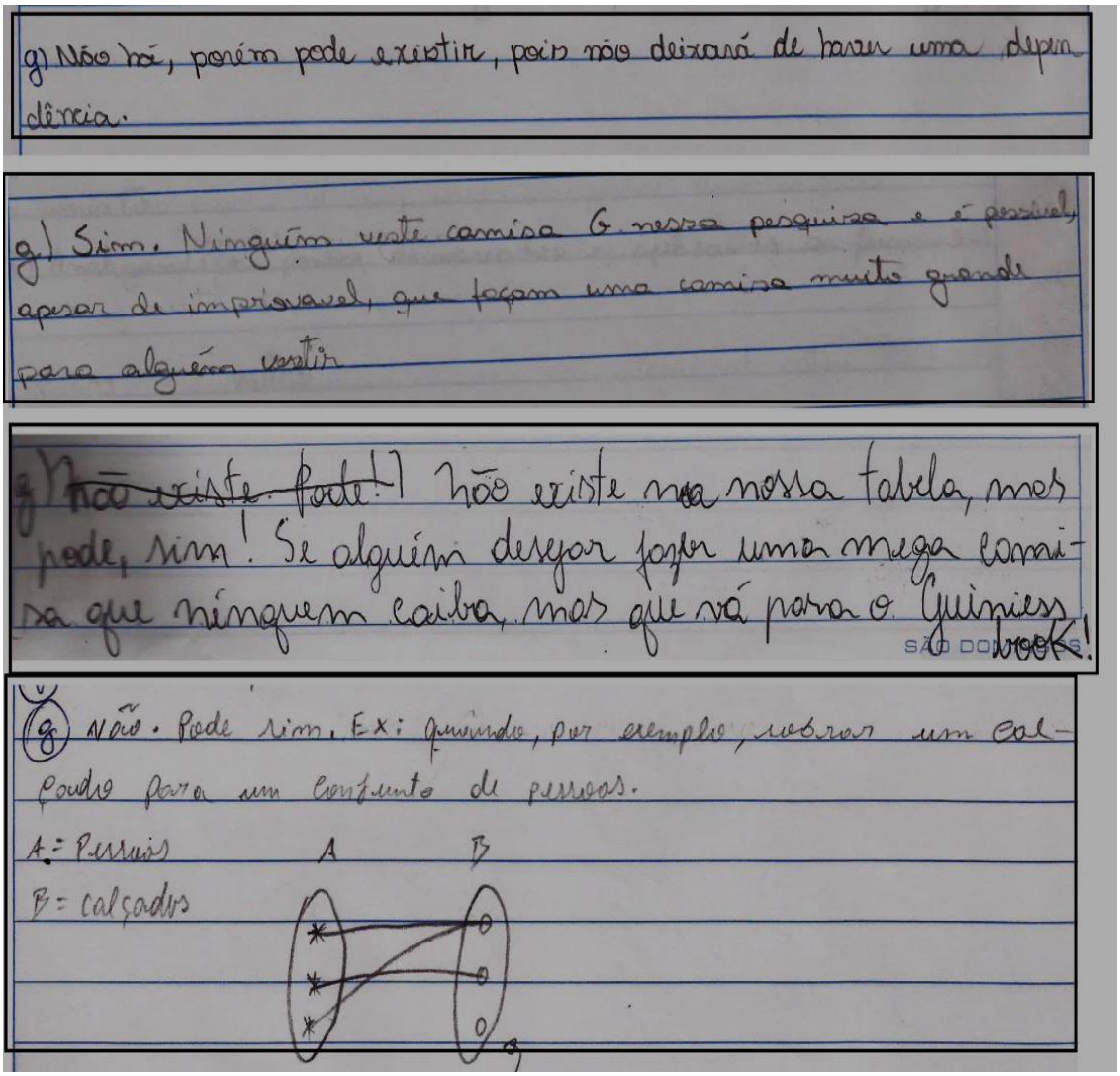
g) Não. Não pode pois para o conjunto B existir é necessário que exista o conjunto A.

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Em uma função qualquer, estimamos o valor de *y* ou *f(x)* a partir de um valor que atribuímos a *x*, muitas vezes, de forma aleatória. Por este motivo, denomina-se *y* como a variável dependente de *x*. Estas informações matemáticas, compreendidas na atividade 1, fizeram com que a maioria dos alunos concluísse que para *y* existir, era preciso que primeiramente um *x* correspondente existisse. Desse modo, não faria sentido aos estudantes que uma variável dependente existisse sem nenhum correspondente. O raciocínio utilizado não está incorreto, mas lembramos que a resposta dos itens era com base na análise da tabela, isto é, dos dois conjuntos de variáveis que não necessariamente faziam parte de uma função, podendo ser uma simples relação de pares de valores. Embora os alunos não tenham se atentado a essa diferença, a resposta da maioria, ao item, foi positiva, demonstrando uma boa compreensão sobre o conceito de função e da relação de dependência entre *x* e *y* nas funções *f(x)*.

Por outro lado, os 11,7% (totalizando 4 pessoas) que responderam poder acontecer de um elemento no contradomínio não ter correspondente, também argumentaram de forma plausível como é mostrado na figura 57.

Figura 57 – Respostas positivas de quatro alunos para o item *g* na segunda questão da atividade 2



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Chamamos a atenção para a resposta do segundo e do terceiro estudante, exibidas na figura 57. Mais uma vez podemos ver a criatividade do aluno ao responder a questão proposta. Eles foram além do que estava registrado em suas tabelas, criando hipóteses de que poderiam existir peças de roupas com o intuito de ir para o livro dos recordes (*Guinness Book*).

O pensamento levou os alunos a concluírem que poderá existir um tamanho de roupa (uma variável *y* no conjunto *B*) que não se corresponderia a nenhum corpo humano (nenhuma variável *x* no conjunto *A*). Mesmo que isso ocorresse, a função continuaria existindo (afirmação dos próprios alunos). Trata-se de um exemplo de função injetora.

Todos esses casos, exemplos e respostas, foram retomados ao final da atividade, no momento da socialização dos resultados e dos esclarecimentos sobre os tipos de função existentes (injetora, sobrejetora e bijetora) e da diferença entre função e relação.

Após este momento investigativo da coleta e análise dos dados, encerramos o encontro.

7.2.10 Dia 10 – 11 de agosto (90 minutos – 2 aulas)

Este novo encontro se deu no laboratório de informática.

Nesta parte da atividade, os alunos inseriram os dados coletados no *software* de planilhas eletrônicas, criaram um gráfico de dispersão e ajustaram os pontos a uma reta, estimando a melhor função.

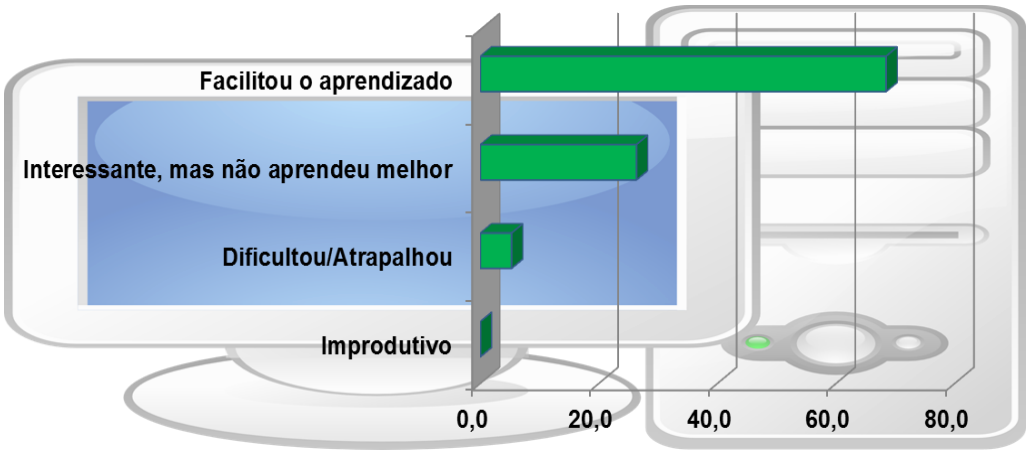
Nesta atividade, não pedimos que os discentes fizessem as construções manuais. Isso porque entendemos que os alunos já passaram pelo formalismo e simbolismo dessas construções na atividade anterior.

Nosso objetivo, nesse momento, foi potencializar as vantagens das TIC listadas por Ponte (1995). O autor cita, como algumas das vantagens, a rapidez e eficiência da manipulação simbólica; a visão mais positiva e o interesse que o aluno adquire pela Matemática ao se envolver em uma atividade mais intensa e significativa.

Realmente, ao responderem o questionário ao final do projeto (ver apêndice *B* – questionário pós-projeto aos alunos), 68,4% dos alunos afirmaram que o uso de recursos tecnológicos facilitou o aprendizado. Nenhum aluno escolheu a opção *improdutivo*, embora 2 desses estudantes (5,3%), afirmaram ter atrapalhado ou dificultado, sem justificar o motivo.

Estes resultados são mostrados no gráfico 9 a seguir.

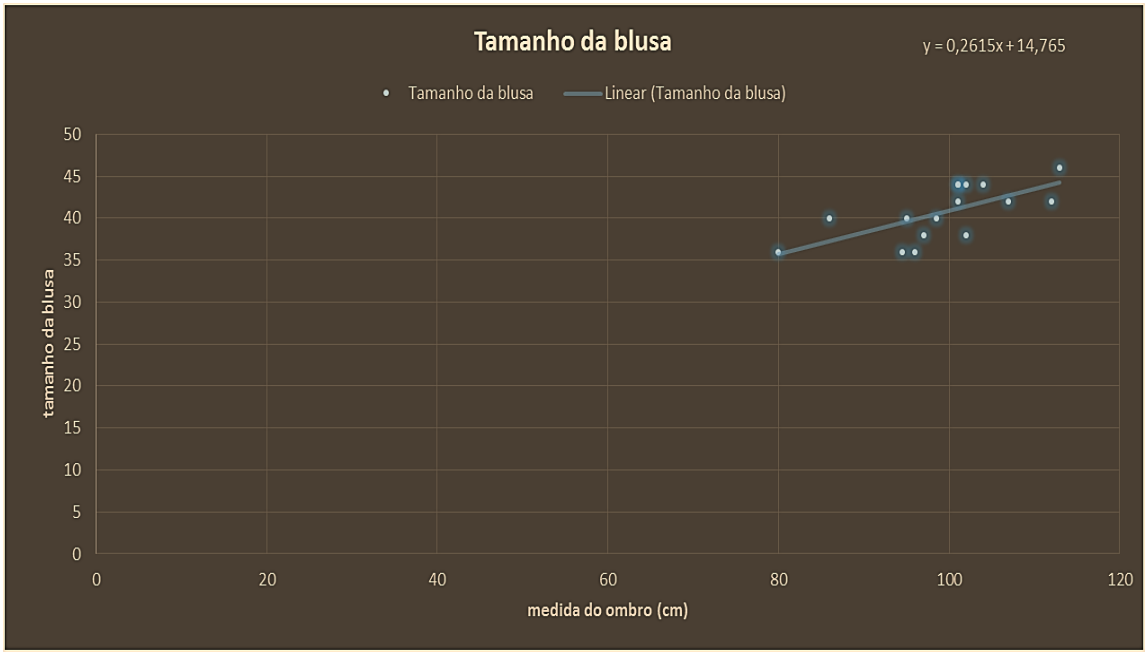
Gráfico 9 – Opinião dos alunos quanto ao uso do recurso tecnológico para ensinar Matemática



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Na figura 58 é possível ver o gráfico construído por um dos grupos. A variável estudada por eles foi medida do busto, que relacionaram com o tamanho de cada camisa.

Figura 58 – Gráfico construído no *Excel* pelo grupo que escolheu relacionar medida do busto com o tamanho da camisa



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

A partir da construção gráfica de cada grupo, no programa, os alunos responderam as questões que seguem:

Questão 3. Escreva a função encontrada e verifique se ela é crescente ou decrescente, justificando a sua resposta.

Questão 4. É possível prever outros valores para a variável y conhecendo a medida/valor de x? Em caso positivo, como? Em caso negativo, justifique.

Questão 5. Que valor x se tem quando y = 0? Este valor é chamado de zero da função, você sabe por que ele tem esse nome?

Questão 6. Que valor y se tem quando x = 0?

Questão 7. Qual o valor do termo independente (também chamado de coeficiente linear) da função encontrada? Compare com o valor encontrado na questão anterior.

Questão 8. A reta ajustada aos pontos, exibida pelo software, passa pelo ponto (0, 0) do plano cartesiano? Em caso positivo, por quê? Em caso negativo, essa reta pode passar por esse ponto? Por quê?

Questão 9. Se você tivesse apenas a função e fosse desenhar o gráfico que a representa em um papel, que pontos mais importantes você teria que conhecer/usar?

Questão 10. Por qual valor no eixo x (linha horizontal do plano cartesiano) a reta passa?

Questão 11. Por qual valor no eixo y (linha vertical do plano cartesiano) a reta passa?

Estas questões tinham como objetivo reforçar os conceitos de coeficientes angular e linear, vistos inicialmente na primeira atividade. Além disso, também exploramos um novo conceito: raiz ou zero de uma função. Novamente, com a finalidade de não queimar etapas do processo de estruturação do pensamento, os alunos passaram, primeiramente, por uma investigação para encontrar o possível valor que anula a função estimada pelo *software.* Somente após pedir para encontrar o valor, apresentamos a sua denominação e pedimos para o aluno refletir o porquê de ser denominado de zero da função.

Dessa vez, todos os gráficos gerados foram crescentes e nenhum grupo se equivocou ao analisar o comportamento das retas. Ao contrário, três dos grupos não só afirmaram que a função era crescente por causa do valor positivo

do coeficiente angular, mas também compararam o crescimento das duas variáveis estudadas (*x* e *y*), observando que enquanto o *x* cresce, o *y* também cresce e, por conseguinte, a função é crescente.

Todos os grupos também responderam de forma correta a quarta questão, afirmando que para encontrar o valor de *y* da função bastava substituir *x* pelo valor conhecido e resolver a equação formada. Foi dessa forma que a maioria dos grupos encontrou o *zero da função*, pedido na quinta questão. Apenas um grupo encontrou o valor através da fórmula –b/a. Isso ocorreu pelo fato de um dos alunos ser repetente. Contudo, não havíamos falado sobre esta fórmula em nenhum momento anterior. Esta foi a primeira vez que o termo *zero da função* foi mencionado.

Talvez por ser o primeiro contato da turma com este novo conceito (zero da função), embora todos tenham encontrado o valor solicitado corretamente, não conseguiram associar este valor com o local onde a reta do gráfico da função afim passa no eixo *x*. Afirmamos isso porque os três grupos que responderam a questão 10 (*Por qual valor no eixo x a reta passa?)* de forma errada, foram os mesmos grupos em que a reta do gráfico no *Excel* não condizia com a função ajustada pelo *software*. Dessa forma, os grupos responderam a questão supracitada informando o valor que estava no gráfico do programa e não o que eles encontraram na questão 5, calculando manualmente.

Diante do ocorrido, decidimos aperfeiçoar a questão 10 da atividade (e por consequência, a questão 11), tentando, dessa forma, evitar novas confusões em futuras aplicações. Assim, as questões atuais são:

Questão 10. De acordo com seus cálculos para encontrar o zero da função na questão 5, por qual valor no eixo x (linha horizontal do plano cartesiano) a reta que representa sua função deve passar no gráfico? É o que acontece no Excel? Se não, é o que deveria acontecer?

Questão 11. De acordo com seus cálculos para encontrar o termo independente da função nas questões 6 e 7, por qual valor no eixo y (linha vertical do plano cartesiano) a reta que representa sua função deve passar no gráfico? É o que acontece no Excel? Se não, é o que deveria acontecer?

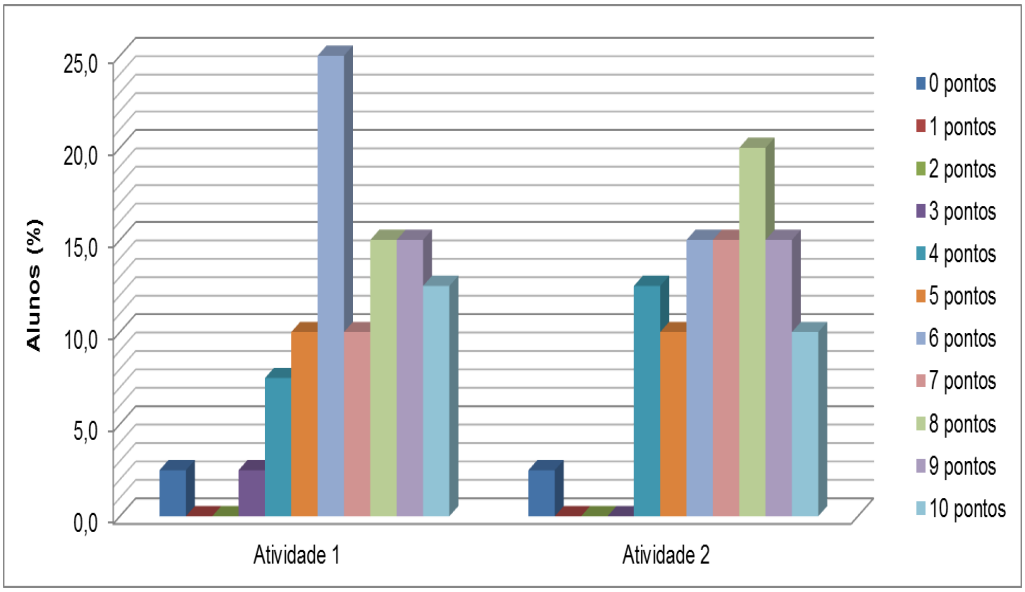
Em contrapartida a essa confusão, percebemos que o conceito de coeficiente linear, termo independente e o local onde a reta do gráfico da Função Afim *passa* no eixo *y*, estavam consolidados pelos estudantes, uma vez que

apenas um grupo não soube relacionar estes conceitos, respondendo de forma equivocada as questões que diziam respeito a isso (questões 7 e 11). Contudo, este mesmo grupo foi estimulado a chegar à resposta correta no momento da socialização dos resultados.

Tentamos, nesta atividade, seguir as recomendações de Miguel; et al (2009), acerca de relacionar o cotidiano com a História da Matemática. O autor considera essa abordagem de ensino positiva. Realmente, utilizamos a história apresentada da atividade anterior, associada, agora, às medidas do corpo humano relacionadas às medidas de peças de roupas, tamanhos de calçados e acessórios. Nesta associação, conduzimos os alunos à matemática escolar, usando as tabelas construídas para explicar domínio e imagem, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, a diferença de função e relação, dentre outros conteúdos matemáticos. Dessa forma, mostramos o caráter científico desse conhecimento, sem impor precocemente o formalismo matemático, apontado por Medeiros (2005) como uns dos problemas no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Os alunos, ao fim das atividades, foram questionados sobre o grau de interesse nas duas propostas realizadas. O resultado é mostrado no gráfico 10 a seguir.

Gráfico 10 – Nota atribuída a cada atividade realizada quanto a ser totalmente interessante (10) ou totalmente desinteressante (0)



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

O gráfico é dividido em dois conjuntos de colunas onde cada conjunto representa a atividade realizada e cada coluna representa a nota atribuída pelo aluno (0 significa totalmente desinteressante e 10, totalmente interessante). Podemos observar que há concentração maior de respostas nas notas maiores, tanto na primeira atividade quanto na segunda. Contudo, na atividade 2, a distribuição é mais homogênea e, portanto, de menor desvio da média, que foi de 6,9 pontos. Isso quer dizer, que a turma avaliou de forma positiva as duas atividades.

Ao término das respostas das questões, os grupos iniciaram a elaboração de um novo relatório para ser entregue no próximo encontro.

7.2.11 Dia 11 – 13 de agosto (90 minutos – 2 aulas)

Por falta de tempo, não preparamos para a segunda atividade a apresentação de slides com cada pergunta e a seleção de respostas dos alunos, como fora feito na finalização da atividade 1. Decidimos por discutir as questões com a turma oralmente, aproveitando o espaço para esclarecer os conceitos de zeros da função, função injetora, sobrejetora, bijetora, domínio, contradomínio, imagem e a diferença de função e relação.

Uma vez que os alunos já haviam passado por todo o processo investigativo ao realizar as atividades históricas, nos permitimos, finalmente, tratar as respostas das questões com mais formalismo matemático, usando notações e termos próprios. Os alunos não demonstraram nenhuma dificuldade na denominação dos nomes, apresentando os exemplos encontrados nas suas tabelas, que lembravam ter analisados.

7.3 APRESENTAÇÃO E REFLEXÃO DE TRECHOS DOS RELATÓRIOS

Como já posto, ao fim de cada uma das duas atividades realizadas, pedimos aos alunos que entregassem um relatório descrevendo o que foi realizado no decorrer dos encontros, suas impressões e aprendizado.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013),

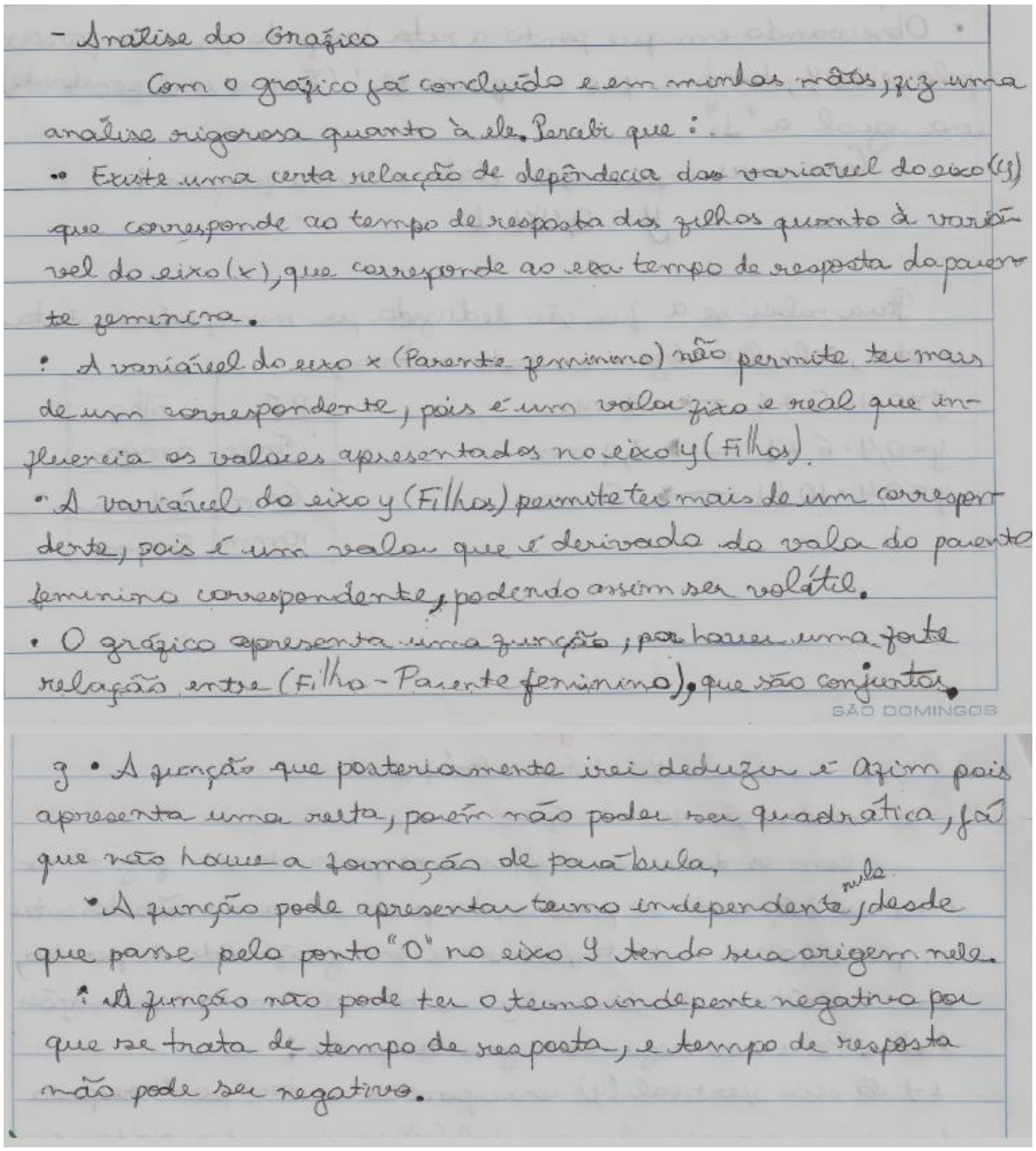
> Um relatório deve incluir uma descrição o mais detalhada possível do trabalho que realizou e pode ser organizado da seguinte forma:
> *Em primeiro lugar*, tente *descrever os passos* que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explicá-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas, esquemas...
> *Em segundo lugar*, procure *resumir o que aprendeu* depois de realizar esse trabalho.
> *Finalmente,* é também importante que organize um *comentário geral em relação a tudo* o que fez. Pode, por exemplo, referir o interesse que a tarefa lhe despertou, quais os aspectos em que teve maior dificuldade e a forma como decorreu o trabalho no grupo. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.111, grifo nosso)

Foram exatamente estas recomendações que os alunos receberam ao serem orientados de como deveriam elaborar o relatório. Poderiam fazer em dupla ou individual. Contudo, a maioria preferiu fazer sozinho.

Alguns dos itens exigidos não foram contemplados nos relatórios entregues da atividade 1. Praticamente todos os estudantes focaram a escrita narrando como construíram o gráfico no *software* de planilhas eletrônicas e/ou fizeram críticas quanto a proposta. Atribuímos esse fato ao recurso tecnológico, como apoio ao processo de Investigação Matemática. Por ser uma novidade aos alunos e ao mesmo tempo ser algo tão íntimo e atrativo para a maioria dos estudantes, o momento das atividades no laboratório de informática foi o mais narrado no relatório. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p.23) preveem isso ao afirmarem que “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes da investigação”.

Apenas dois alunos descreveram passo a passo o que fizeram, listaram o que aprenderam e tecerem comentários e conclusões. Na figura 59 a seguir, há uma parte do relatório de um desses discentes. O aluno *LA*, autor do relatório, faz uma análise do gráfico construído manualmente. A variável por ele usada foi o tempo de resposta do jogo de raciocínio lógico entre as mães e seus respectivos filhos. Podemos ver que no primeiro item, o aluno *LA* cita a diferença entre a variável dependente e a independente. Estes conceitos estão bem claros para o estudante, que não confunde com termo independente, citado no penúltimo e no último item de suas análises.

Figura 59 – Parte do relatório do aluno *LA* referente à análise da atividade 1



- Análise do Gráfico

Com o gráfico já concluído e em minhas mãos, fiz uma análise rigorosa quanto à ele. Percebi que:

•• Existe uma certa relação de dependencia das variavel do eixo (y) que corresponde ao tempo de resposta dos filhos quanto à variável do eixo (x), que corresponde ao eixo tempo de resposta da parente feminina.

• A variável do eixo x (Parente feminino) não permite ter mais de um correspondente, pois é um valor fixo e real que influencia os valores apresentados no eixo y (Filhos).

• A variável do eixo y (Filhos) permite ter mais de um correspondente, pois é um valor que é derivado do valor do parente feminino correspondente, podendo assim ser volátil.

• O gráfico apresenta uma função, por haver uma forte relação entre (Filho - Parente feminino), que são conjuntos.

SÃO DOMINGOS

3 • A função que posteriormente irei deduzir é afim pois apresenta uma reta, porém não pode ser quadrática, já que não houve a formação de parábola.

• A função pode apresentar termo independente nulo, desde que passe pelo ponto "0" no eixo y tendo sua origem nele.

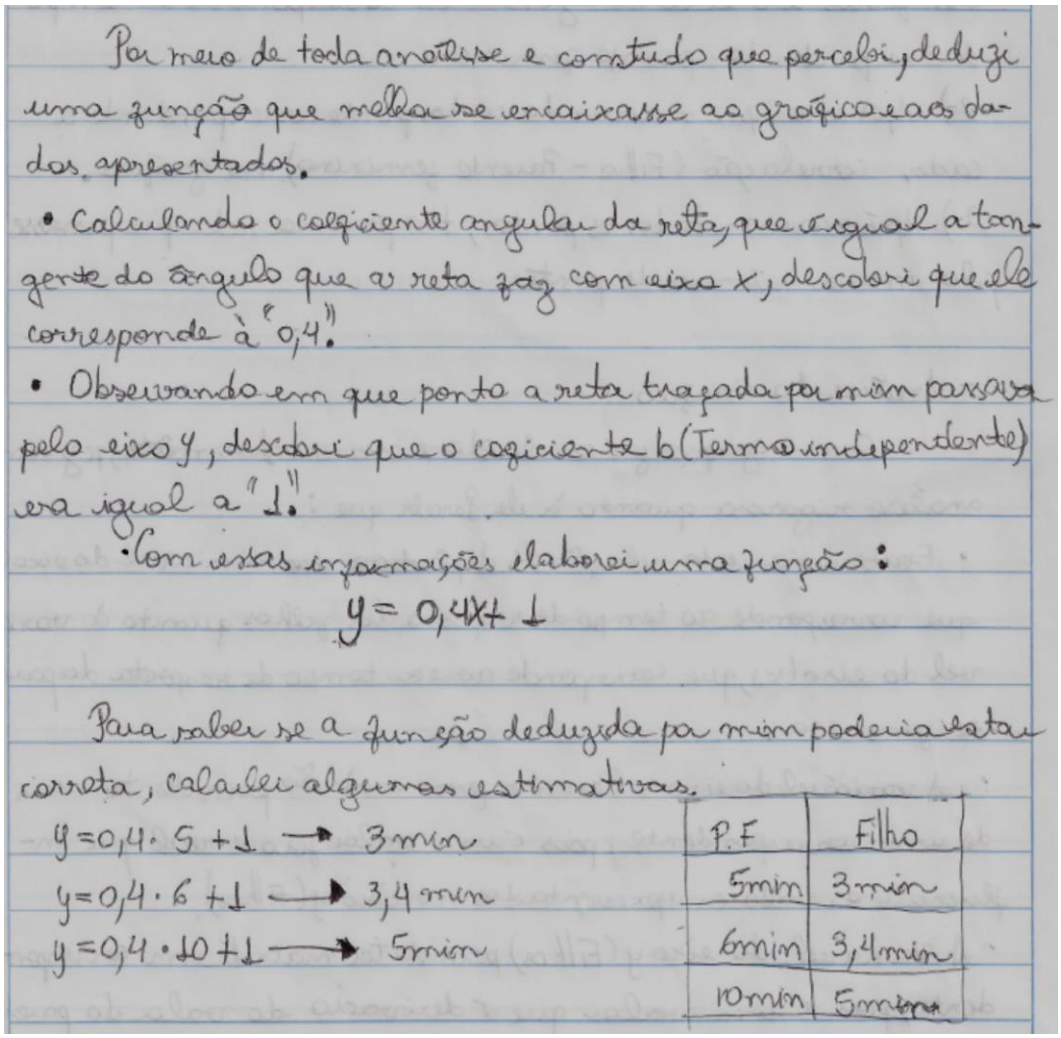
• A função não pode ter o termo independente negativo por que se trata de tempo de resposta, e tempo de resposta não pode ser negativo.

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Ainda sobre o relatório anterior, no quarto item apresentado, é visível, também, sua compreensão de relação gráfica e de função.

Na figura 60 a seguir, podemos ver as conclusões realizadas por esse aluno, após todas as análises.

Figura 60 – Parte do relatório do aluno *LA* referente à conclusão da atividade 1



Por meio de toda análise e conteúdo que percebi, deduzi uma função que melhor se encaixasse ao gráfico e aos dados apresentados.

• Calculando o coeficiente angular da reta, que é igual a tangente do ângulo que a reta faz com eixo x, descobri que ele corresponde à "0,4".

• Observando em que ponto a reta traçada por mim passava pelo eixo y, descobri que o coeficiente b (Termo independente) era igual a "1".

• Com essas informações elaborei uma função:

$$y = 0,4x + 1$$

Para saber se a função deduzida por mim poderia estar correta, calculei algumas estimativas.

$y = 0,4 \cdot 5 + 1 \rightarrow 3$ min

$y = 0,4 \cdot 6 + 1 \rightarrow 3,4$ min

$y = 0,4 \cdot 10 + 1 \rightarrow 5$ min

P.F	Filho
5min	3min
6min	3,4min
10min	5min

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Podemos ver na figura anterior que o aluno não só estima a melhor função de ajuste, como também a usa para encontrar os tempos de respostas do jogo, pelos filhos, dados os tempos de respostas de cada parente.

Ao narrarmos a aplicação da atividade, nos subtópicos anteriores, mencionamos o aluno *LT,* na figura 35. Ao construir o gráfico de dispersão manual e traçar a reta de ajuste, o estudante confundiu a reta que representa o gráfico da Função Afim com a reta da média, mostrado no gráfico original de Galton (rever figura 17).

Este mesmo aluno comentou sobre seu equívoco, ao escrever o relatório. Tal comentário é mostrado na figura 61 a seguir. O aluno não só reconhece o erro, como também afirma que ao reconstruir o gráfico no *software* de planilhas

eletrônicas, pode entender de maneira correta o que representava a reta no gráfico.

Figura 61 – Aluno *LT* comentando sobre o seu equívoco de denominar a reta da função de média

1. Coletado todos os dados, respondi algumas perguntas até chegar na primeira função, onde eu fiz uma relação de mães (X) e filhos (Y). A mesma não deu muito certo porque achei que a função, que representei por f(x)=2x+0, fosse a média da função.
2. Após fazer a função no papel, a professora nos possibilitou o uso do computador e a ferramenta Excel, usada para criação de gráficos e tabelas, que nos mostrou uma visão mais correta do que é uma função, pois, por ser um instrumento digital, ficou fácil trabalhar com os números, já que ele fazia tudo por nós.

Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

De forma semelhante ao aluno *LA*, a aluna *PB* também listou suas observações, análises e conclusões da atividade realizada.

Chamamos a atenção para dois itens listados pela aluna e mostrados na figura 62 a seguir.

Figura 62 – Análises da aluna *PB* em seu relatório acerca da atividade 1

Notei que:

- Existia uma relação de dependência entre os dois eixos do plano (horizontal e vertical), pois quanto maior era a massa do parente, maior era a do filho.
- A variável do eixo x (horizontal) e do eixo y (vertical) permitia ter mais de um correspondente. Entretanto, como o que estávamos observando era a reta, não poderia ter mais de um correspondente, já que a reta não era no sentido vertical reto, ou horizontal reto, e sim inclinada!
- Função é quando se há uma relação de dependência, ou seja, existe um termo independente, e outro dependente. E no caso, o gráfico apresenta essa característica.

Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

Entre todos os comentários, ainda houve alunos que permaneceram com o pensamento que a História e a Matemática são sempre dissociáveis, como é mostrado em dois trechos de relatórios distintos, na figura 63.

Figura 63 – Trechos de dois relatórios distintos, citando a dissociação da História com a Matemática

- Em suma, não absorvi muita coisa e sua aula parecia ser de história misturada com matemática. :D Mas até que foi legal.

Tá lindo o seu trabalho com a gente. Só espero que venham atividades mais legais que pareçam ter mais a ver com matemática do que com história.

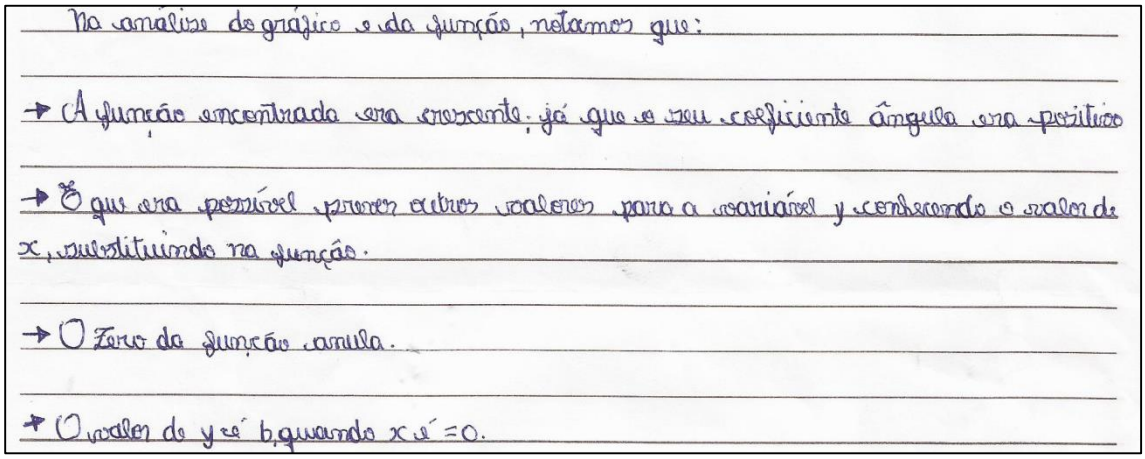
Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Uma vez que a segunda atividade foi realizada em grupos maiores, o relatório 2 foi construído por cada grupo. Esperávamos que neste segundo relatório, referente à atividade 2, os alunos iriam conseguir abordar todos os itens exigidos. Contudo, a maioria dos relatórios ainda se apresentou incompleto, com descrições parciais de algumas etapas e omissão de outras.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) veem essas dificuldades como naturais. Os autores justificam que os grupos não estão familiarizados com o processo. É necessário um trabalho continuado com esse tipo de tarefa para fazer com que os alunos percebam a importância do registro escrito e não encararem a atividade apenas como exigência do professor.

Ainda assim, avaliamos o segundo relatório melhor construído, comparado ao primeiro. Veja a imagem 64 a seguir.

Figura 64 – Parte do segundo relatório de um dos grupos


Na análise do gráfico e da função, notamos que:

→ A função encontrada era crescente, já que o seu coeficiente ângulo era positivo

→ É que era possível prever outros valores para a variável y conhecendo o valor de x, substituindo na função.

→ O Zero da função anula.

→ O valor de y é b, quando x é = 0.

Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

Observamos na figura 64 a presença maior de linguagem matemática e formalismo. O grupo menciona o crescimento da função através da análise do sinal do coeficiente angular da função.

Na figura 65 a seguir, o grupo introduz o relatório mencionando a relação existente entre a Matemática e outras áreas da ciência, retomando o que Miguel (1993) cita como uma das funções pedagógicas de usar a HM. Além disso, usa os termos matemáticos *função, equação* e *coeficientes* para explicar o que aprendeu com a atividade.

Figura 65 – Introdução do segundo relatório de um dos grupos

1. Introdução

Como foi ressaltado no relatório anterior, o estudo das funções não é de importância apenas para a matemática, mas também para outros campos do conhecimento, tais como Física, Química e Biologia, tendo em vista a sua grande aplicabilidade na estimativa de fenômenos da natureza.

Há várias classes de funções, caracterizadas por equações, gráficos e propriedades específicas. A mais simples destas classes é constituída pelas funções que podem ser expressas por uma equação da forma $f(x) = ax + b$. Uma função deste tipo é chamada função afim e o seu gráfico é uma reta com coeficiente angular *a* e coeficiente linear *b*.

Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

Todos os grupos mencionaram a diferença entre os tipos de variáveis. Um dos grupos fez esta menção exemplificando dentro do contexto da atividade realizada, como é mostrado na figura 66 a seguir.

Figura 66 – Parte do segundo relatório de um dos grupos

Nós sabíamos sobre a dependência do tamanho da blusa em relação ao busto, mas não tínhamos analisado a possibilidade da existência de um y sem correspondente em x dentro desse contexto. Na elaboração das respostas do questionário percebemos isso e citamos a possibilidade da criação de uma camisa grande demais para qualquer ser humano com objetivo de ir para o Guiness Book :D

Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

Dois grupos (14,3%) classificaram a função encontrada como sobrejetora ou injetora. Houve grupos, ainda, que falaram da definição de função e a relação biunívoca entre os conjuntos domínio e imagem.

No item destinado a sugestões e opiniões, na metade dos relatórios entregues houve menção ao trabalho em grupo realizado. Os alunos julgaram proveitoso e que a troca de ideias entre os componentes facilitou o trabalho. A mesma quantidade (50%) também enfatizou que a atividade 2 foi mais divertida e interessante, uma vez que eles precisavam medir os próprios colegas de sala.

Por fazer parte da rotina da instituição, após o término do projeto, realizamos uma avaliação escrita individual com os alunos da turma. Os resultados são exibidos e comentados no subtópico a seguir.

7.4 A AVALIAÇÃO FINAL: UMA ANÁLISE ESTATÍSTICA DO DESEMPENHO DOS ALUNOS

Uma vez que a turma analisada é da primeira série do Ensino Médio do IFRN, a grade curricular de Matemática (ver anexo *A*) não prevê estudar os assuntos de Estatística. Este conteúdo está contido no currículo da terceira série do Ensino Médio do instituto. Por este motivo, a avaliação individual realizada a fim de compor a nota do segundo bimestre, exigência da instituição de ensino, abordou apenas os conceitos relacionados com Função Afim (ver apêndice *F* com a atividade avaliativa individual).

Como o projeto tem por finalidade aplicar os conhecimentos de Função Afim e de noções de Estatística Básica, o professor pode optar por fazer uma avaliação que aborde ambos os conteúdos. Como sugestão de questões que poderão ser abordadas, com base nas atividades propostas, elaboramos uma avaliação que consta ao fim da atividade 2 (ver apêndice *E*).

Embora nossas atividades tenham sido pensadas, construídas e aplicadas de forma não tradicional, optamos como parte da análise dos resultados de nossa pesquisa, uma avaliação tradicional (prova escrita). Isso se deu pelo fato dos resultados dessa prova serem registrados nos boletins de cada estudante. Além disso, não se pode abolir o método da vida acadêmica dos

alunos, visto que até os dias atuais, este é a principal forma de ingresso nas instituições de nível superior e de seleção para inúmeros empregos.

A avaliação elaborada à turma, sobre Função Afim, foi constituída de uma parte conceitual e uma parte de resolução de problemas fictícios. Na parte conceitual, buscamos avaliar os conhecimentos que os alunos haviam construído sobre o conceito de função, de zero da função, do crescimento e do gráfico de uma função. O objetivo era identificar se estes conceitos foram bem internalizados e se tornaram significativos para o aluno. Desse modo, as perguntas eram subjetivas e o aluno precisava explicar o que significava um determinado valor encontrado ou termo matemático.

A parte de resolução de problemas fictícios não foi abordada nas atividades históricas. Contudo, julgamos que os alunos seriam capazes de resolver as questões propostas com base nos conhecimentos de construção de gráficos, disposição dos pares ordenados no plano cartesiano e estimativa dos coeficientes angular e linear.

Todos esses conhecimentos foram trabalhados ao longo das duas atividades históricas realizadas.

A primeira questão apresenta uma situação de conta bancária de uma pessoa. Atualmente, ela possui 100 reais em sua conta. A partir do próximo mês irá depositar, regularmente, 50 reais mensais.

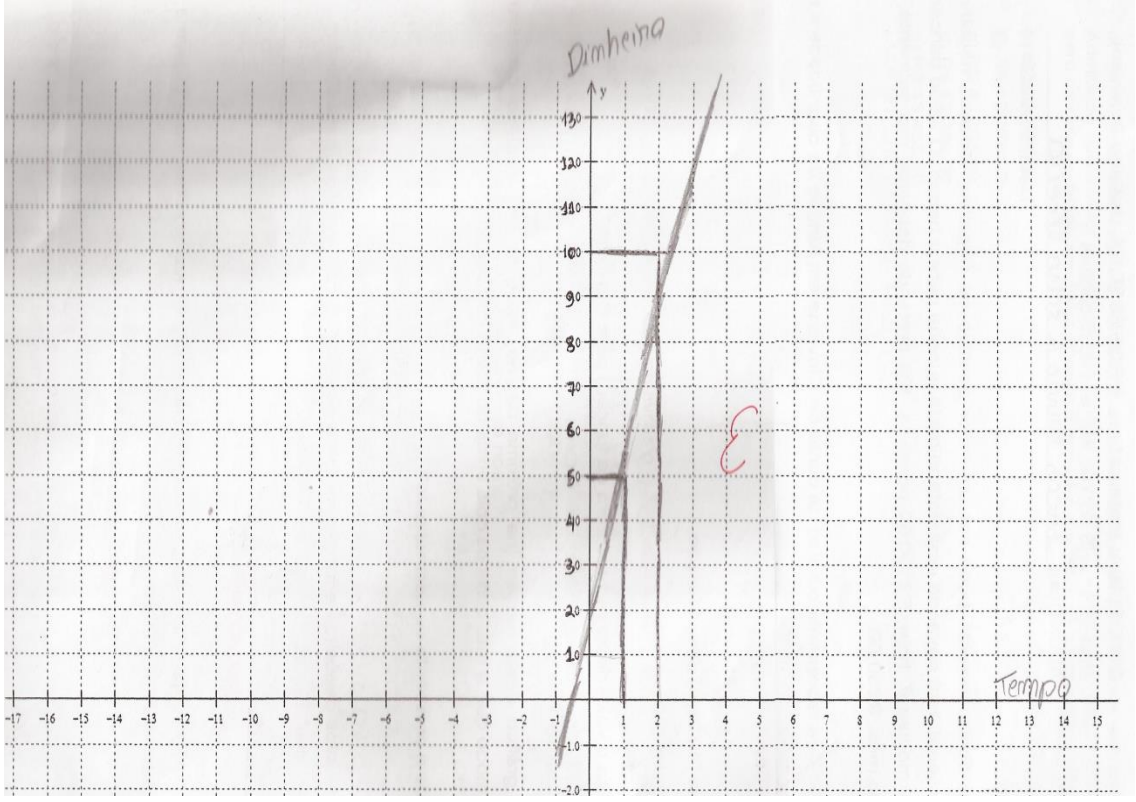
Os primeiros itens desta questão pediam a construção da função que representa o saldo total da conta em função dos meses e a construção do gráfico que representa esta função.

Apenas 3 alunos encontraram a função incorreta, pois esqueceram do valor fixo de 100 que já possuía na conta. Embora 92,5% dos estudantes acertaram encontrar a função que representa a situação descrita, 45% erraram totalmente ou não fizeram a construção do gráfico. Em contrapartida, 37,5% acertaram completamente a construção e o restante 17,5% construiu de forma parcialmente correta, uma vez que não foi traçada a reta pelos dois eixos cartesianos, como foi pedido.

Observe a figura 67 a seguir com o gráfico do aluno *LM*. Analisando o erro de construção deste aluno, podemos concluir que ele não levou em consideração o saldo que já possuía na conta, antes dos depósitos serem

iniciados. Assim, ele não construiu o gráfico da função 100 + 50*m* (onde *m* é a quantidade de meses transcorridos).

Figura 67 – Construção do gráfico da função *f(x) = 100 + 50m* pelo aluno *LM*, na avaliação final



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

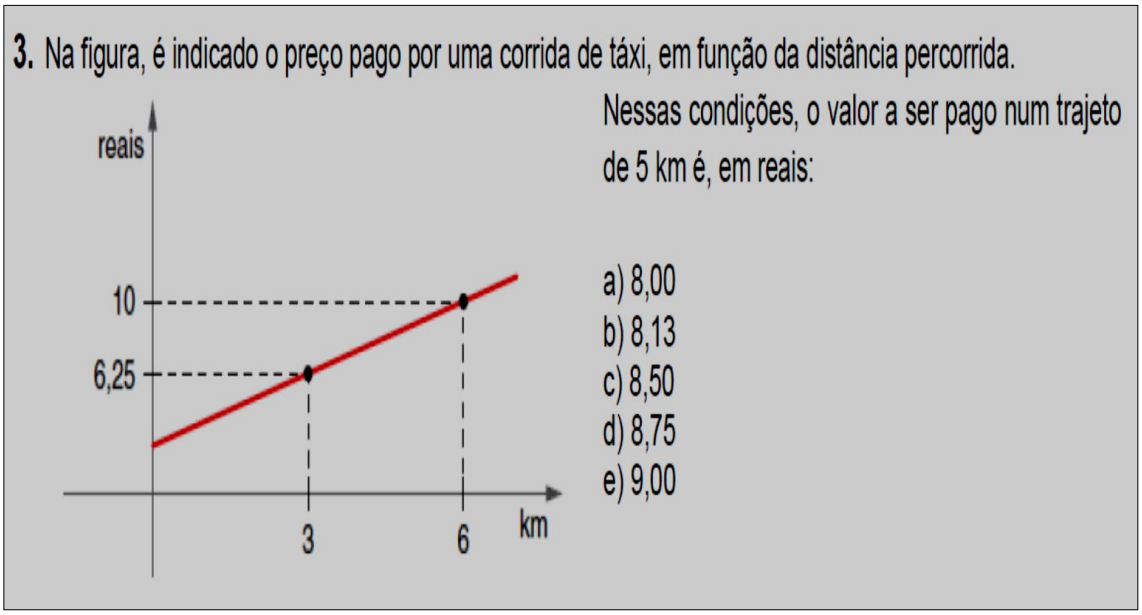
Apesar do erro, podemos observar na figura 67, que o aluno rotulou corretamente os eixos *x* e *y*, com a grandeza (tempo e dinheiro) que correspondia a cada variável. Além deste aluno, outros cinco cometeram o mesmo equívoco ao representar a função graficamente.

Um fato interessante, é que os alunos que não fizeram o gráfico responderam o item *e* da primeira questão de forma correta. O item pergunta se a reta traçada é crescente e decrescente. Os alunos que não possuíam a reta para fazer a análise foram capazes de responder analisando o sinal do coeficiente angular da função encontrada. Assim, acertaram a resposta ao item.

A terceira questão pode ser classificada em um nível de dificuldade alto. Isso porque a questão apresenta o gráfico de uma Função Afim sem informar

qual é a função, nem o valor onde a reta passa no eixo *y*. A informação adicional fornecida é das coordenadas de dois pontos pertencentes a este gráfico e se pede a ordenada do ponto onde a abscissa é 5 km. Veja a questão mencionada na figura 68 a seguir.

Figura 68 – Questão 3 da avaliação final, após aplicação do projeto

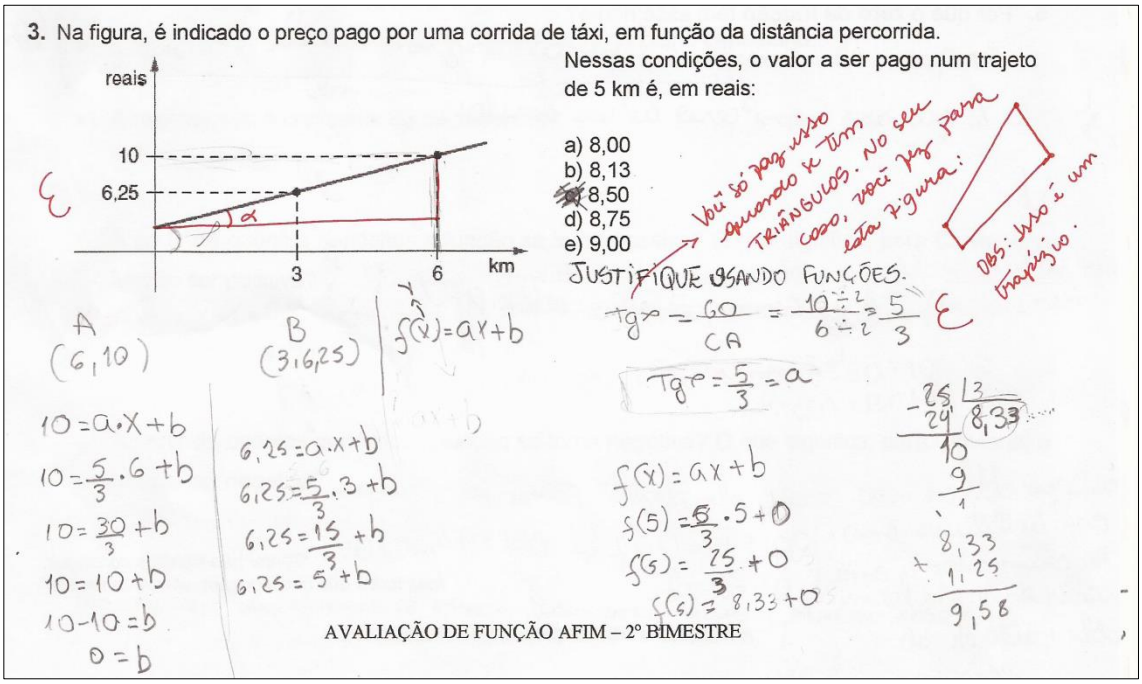


Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Para resolver esta questão, o aluno precisava usar o gráfico exibido, observando os pontos conhecidos, isto é, os pares ordenados (3; 6,25) e (6; 10). Com estes dois pontos é possível fazer um sistema de equações lineares e encontrar o valor dos coeficientes angular e linear da função. Dessa forma, o estudante teria a função que o gráfico estava representando e poderia substituir a variável independente por 5 para encontrar o seu valor correspondente.

Os alunos que erraram totalmente a resolução ou que não fizeram totalizaram 37,5% da turma. Mais da metade dos estudantes (52,5%) acertaram totalmente esta questão, fazendo sistema de equações para encontrar os coeficientes *a* e *b* da função. Os alunos que cometeram algum erro, se confundiram com a fórmula usada para encontrar o coeficiente angular, como no caso da aluna *RS*, da figura 69 a seguir.

Figura 69 – Resolução da aluna *RS* para a questão 3 da avaliação final



Fonte: Arquivo pessoal (2015).

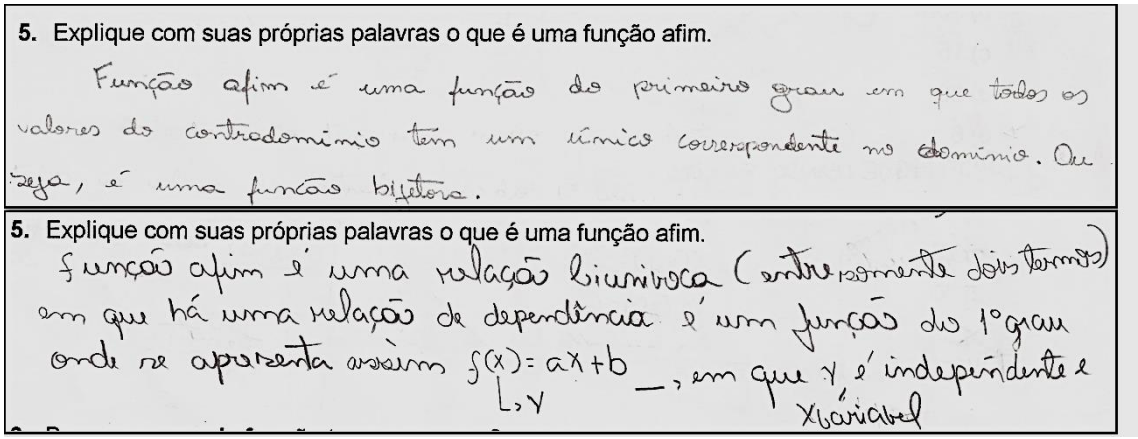
Com estes casos, podemos concluir o quanto é importante o professor não priorizar o uso da fórmula, mas sim enfatizar os significados de cada conceito e o pensamento lógico envolvido. Não devemos justificar o erro de um aluno, apontando exclusivamente como causa a sua distração ou a falta de conhecimento específico. Na figura 69, anterior, fica claro que a aluna generalizou a fórmula utilizada para encontrar o coeficiente angular. A fórmula é válida apenas para triângulos retângulos, mas a aluna tenta aplicar em um quadrilátero. Trata-se de um erro de procedimento. Socas (1997) associa esta dificuldade aos processos do pensamento matemático, muitas vezes não estimulada pelo docente. “Ao abandonar certas demonstrações formais em benefício de uma aplicação mais instrumental das regras matemáticas, não deve implicar de nenhuma maneira o abandono do pensamento lógico” (SOCAS, 1997, p.7, tradução nossa)[26].

[26]“El abandonar ciertas demonstraciones formales em beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamento lógico” (SOCAS, 1997, p.7)

O autor ainda afirma que a dedução lógica não deve se confundir com a dedução formal, tampouco com os procedimentos algorítmicos das contas e cálculos matemáticos. O pensamento lógico deve estar presente em todas as atividades matemáticas (SOCAS, 1997). Cabe ao professor oportunizar os momentos que levem os alunos a pensarem no porquê de usarem determinada fórmula para resolver uma questão e não outra fórmula qualquer. No caso do exemplo citado, o aluno não aprendeu o porquê de usar a fórmula apenas para triângulos retângulos. Como consequência, pensou poder aplicar a fórmula para um quadrilátero.

Paralelo a estes resultados, a questão 5 da avaliação (explique com suas próprias palavras o que é uma Função Afim) foi respondida de forma satisfatória por todos os alunos da turma. Na figura 70 a seguir, destacamos duas dessas respostas.

Figura 70 – Definição de Função Afim dada por dois discentes na avaliação final


5. Explique com suas próprias palavras o que é uma função afim.

Função afim é uma função do primeiro grau em que todos os valores do contradomínio têm um único correspondente no domínio. Ou seja, é uma função bijetora.

5. Explique com suas próprias palavras o que é uma função afim.

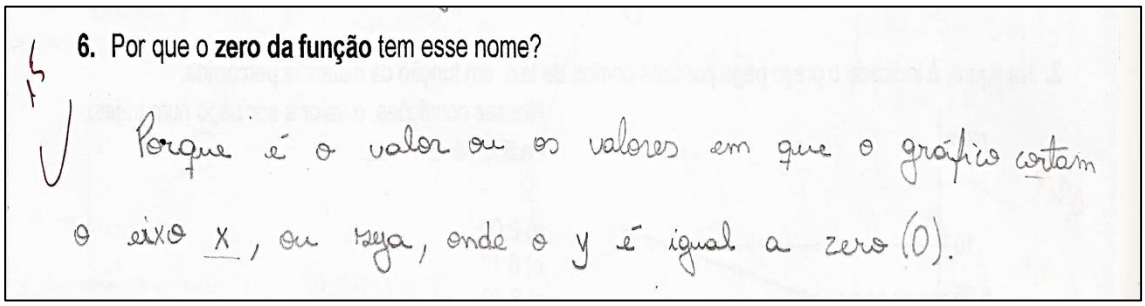
função afim é uma relação biunívoca (entre somente dois termos) em que há uma relação de dependência é uma função do 1º grau onde se apresenta assim $f(x) = ax + b$, em que y é independente e x variável

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Podemos observar na imagem anterior que as respostas dos alunos não foram cópias das definições padrões dos livros didáticos. Os discentes, de fato, responderam com suas próprias palavras.

A última pergunta pedia para o estudante explicar o porquê da denominação *zero da função*. As respostas corretas a esta questão totalizaram 70% dos estudantes. Uma dessas respostas corretas é mostrada na figura 71.

Figura 71 – Resposta correta da aluna GV acerca do zero da função


6. Por que o **zero da função** tem esse nome?

Porque é o valor ou os valores em que o gráfico cortam o eixo x, ou seja, onde o y é igual a zero (0).

Fonte: Arquivo Pessoal (2015).

Por fim, a tabela 7 mostra as notas obtidas pelos estudantes nesta avaliação final. Podemos visualizar que 65% dos estudantes pesquisados obtiveram nota acima ou superior à média de 60 pontos.

Tabela 7 – Desempenho dos alunos na avaliação final e individual

Notas da prova	Alunos	%	F↓	F↓%	F↑	F↑%	P.M.
0 |- 15	1	2,5	1	2,5	40	100	7,5
15 |- 30	5	12,5	6	15,0	39	97,5	22,5
30 |- 45	4	10,0	10	25,0	34	85,0	37,5
45 |- 60	4	10,0	14	35,0	30	75,0	52,5
60 |- 75	8	20,0	22	55,0	26	65,0	67,5
75 |- 90	3	7,5	25	62,5	18	45,0	82,5
90 |-| 100	15	37,5	40	100,0	15	37,5	95
Total	**40**	**100,0**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**

Fonte: Arquivo pessoal (2015).

Diante de expressivos resultados, consideramos a aplicação de nossa proposta positiva e faremos, no capítulo que segue, nossas considerações finais.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao nos depararmos com a história do estatístico Francis Galton, conhecemos a Regressão Linear, um dos resultados de seus experimentos. A Regressão Linear foi criada, dentro de um contexto eugênico, com o objetivo de estimular a procriação de casais selecionados e evitar que casais avaliados com características degenerativas, se reproduzissem. Embora seja um tema polêmico, de caráter preconceituoso, buscamos nesta História a matemática das Funções Afim e da Estatística, fortemente presentes.

Miguel (1993, p.69) afirma que “para se ter algum interesse por um processo é necessário conhecer um pouco da história e do benefício que se pode obter desse conhecimento”. O saber da história de um conteúdo matemático é visto por muitos autores, tais como Fossa, Mendes, Miguel, dentre outros, como uma motivação para o processo de ensino e de aprendizagem. Contudo, Miguel e Miorim (2008) lembram que o aspecto motivador de um problema não reside no fato de ser ele histórico, mas sim das suas relações com a vivência do estudante.

Justificamos o caráter motivador do tema escolhido por nós, pelo fato do estudo antropométrico realizado por Galton para comprovar a sua teoria eugênica ter dado origem não só a conceitos matemáticos e estatísticos, mas também por ter gerado o método de reconhecimento digital e está intimamente ligado à padronização das medidas de roupas, calçados e acessórios. De fato, comprovamos em nossas análises e resultados de questionários o interesse e motivação dos estudantes ao medirem seus colegas e a si próprios. Grupos foram além das pesquisas solicitadas, para descobrir o porquê da relação entre o tamanho das roupas em número (ou intervalo de números) e em letras. A atitude de alguns alunos em pesquisar na internet imagens dos instrumentos de medições usados por Galton também comprovou a motivação que a história da obra do estatístico causou na maioria dos estudantes, bem como o apoio das TIC para o trabalho desta natureza. Realmente, vimos que mais de oitenta por cento dos estudantes responderam, no questionário de avaliação da proposta, que acharam interessante usar as TIC para a resolução das atividades.

Miguel (1993), ao citar as funções pedagógicas da História, afirma que sua utilização pode levar o estudante a perceber as conexões existentes entre a

Matemática e outras ciências, e recomenda não tratá-la de forma isolada. De fato, ao iniciarmos a aplicação da primeira atividade, antes mesmos que os alunos tomassem conhecimento sobre os conceitos matemáticos que iriamos abordar, 19 dos alunos, ao pesquisarem a definição do termo *Eugenia*, responderam que, embora fosse um conceito da Biologia, existia uma relação com a Matemática pelo fato de ter a ver com genética e medidas físicas.

Além dessa função, Miguel (1993) também cita outra particularidade do uso da História, a qual foi confirmada na aplicação da atividade. A função pedagógica que mencionamos diz respeito a curiosidade intelectual do matemático que produz o conhecimento. Seu interesse em saber o que aconteceria se determinadas medidas fossem realizadas, pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias. Em muitos momentos os alunos discordaram das teorias de Galton, citando exemplos de filhos que não herdaram as características físicas e/ou intelectuais dos pais. De fato, 4 alunos afirmaram que Galton não tinha razão em seu estudo. Em contrapartida, os demais, embora conscientes dos contra exemplos, compreenderam que eram exceções e que o estudo trazia a generalização de uma série de experimentos.

Nesse sentido, os alunos compreenderam a essência da utilidade das funções e três desses discentes usaram o termo *prever o futuro* para responder, na avaliação final (ver apêndice *F* com a avaliação final), o que era uma Função Afim. Embora a função também possa fornecer resultados passados, a resposta do aluno é vista, por nós, como positiva. Quando o estudante deixa de usar termos técnicos e consegue explicar com suas próprias palavras o que aprendeu, nos remete ao que Fossa (2011) chama de *antídoto contra o esquecimento que gera a alienação*.

Porém, o objetivo geral deste trabalho foi construir um caderno de atividades históricas para abordar e contextualizar os conceitos de Função Afim e noções de Estatística com base na recriação de momentos históricos da Regressão Linear. Para tanto, elaboramos uma sequência de duas atividades históricas na perspectiva da Investigação Matemática, solucionadas com o auxílio das Tecnologias de Informação e Comunicação.

Trabalhamos, assim, com três vertentes, HM, IM e TIC, de modo a contextualizar e aplicar os conceitos matemáticos estudados e torná-los mais significativos tanto no passado quanto no presente.

Desse modo, a primeira atividade recriou o experimento de Galton, realizado com pais e filhos, que deu origem à Regressão Linear. Os alunos mediram eles próprios e seus parentes mais próximos. Com os dados de todos os estudantes da turma, construíram tabelas manuais e com o auxílio de um *software* de planilhas eletrônicas. Analisaram cada gráfico construído, investigando o tipo de função estabelecida, os coeficientes linear e angular da função, as variáveis envolvidas, o crescimento da função, o comportamento do gráfico, a raiz da função, dentre outros conceitos matemáticos. Comprova-se, assim, o uso da HM como fonte para seleção de problemas e métodos adequados para o ensino de Matemática.

Autores como Borba (2010), e ainda Fauvel e Maanen (2002), defendem o uso de aparatos tecnológicos para o ensino da Matemática argumentando que estes recursos facilitam a análise dos resultados e reservam um tempo maior para a reflexão e conclusão. De fato, na aplicação da primeira atividade, ao comparar a função com a reta de ajuste, ambas estimadas pelo *software*, os alunos retomaram os conhecimentos prévios sobre os coeficientes linear e angular da Função Afim, bem como os gráficos originados deste tipo de função. Em alguns casos, concluíram que a função não condizia com a reta de ajuste, quando projetada até passar pelo eixo *y*. A partir dessa conclusão, novas hipóteses foram criadas pelos estudantes para explicar a questão com a qual se depararam: *Por que a função não condiz com o gráfico traçado, uma vez que foi a própria máquina que gerou*?. O mesmo questionamento não ocorreu quando construíram os mesmos gráficos à mão, mesmo quando o gráfico também não condizia com a função que os próprios alunos estimaram. Tal fato nos remete a fala de Ponte (1995) quando afirma que as TIC colocam desafios irrecusáveis à atividade educativa e proporciona poder ao pensamento matemático. Além disso, Valente (1999) também cita o computador como um provocador de mudanças pedagógicas no aluno. Estes estímulos foram evidenciados nos comportamentos dos alunos ao longo do trabalho do ajuste dos pontos à reta, utilizando o *software*.

A internet permitiu que os alunos não se limitassem ao que estava sendo exposto na sala de aula. Grupos buscavam constantemente significados e imagens de alguns termos que apareciam nas leituras históricas, muitas vezes, por conta própria, sem recomendação do professor, simplesmente pelo interesse

e curiosidade em conhecer, bem como pela facilidade de pesquisar em um ambiente computacional. O uso da internet também foi útil para que os alunos aprendessem a selecionar informações corretas e não confiar em qualquer site pesquisado.

Acerca dos gráficos construídos no *software*, Fauvel e Maanen (2002, p.354) afirmam que “em alguns casos, os estudantes de hoje podem ser capazes de encontrar coisas nas imagens que os seus antecessores não puderam”. Realmente, em alguns diálogos do capítulo anterior comprovamos isso. O caso do aluno *LF,* que percebeu que a reta não passava pelo máximo de pontos possíveis, mas sim pela menor distância entre eles; os 9 alunos que perceberam que sua função não condizia com a do gráfico, mesmo sendo gerados pelo *software*; e o aluno *PT* que visualizou seu conjunto de pontos ordenados de tal forma que se ajustariam melhor a uma parábola do que a uma reta; comprovam que as tecnologias não são usadas apenas para reduzir tempo e/ou esforços, mas que permitem reflexões e pensamentos criativos que muitas vezes vão além do que estava planejado para a aula.

Como já posto, a HM e as TIC por si só não garantem o aprendizado do aluno. Por este motivo, na primeira e na segunda atividade proposta e aplicada, elaboramos questões que permitiram os alunos investigarem a situação para somente depois, responder. É na perspectiva da IM que o aluno pode aprender e aumentar seu interesse pela Matemática (FOSSA; MENDES; VALDÉS, 2006). Com gráficos construídos manualmente e com planilhas eletrônicas, os estudantes foram capazes de responder suas próprias dúvidas, bem como formular e avaliar/testar hipóteses, etapas estas previstas no processo de IM. Quando, por exemplo, o aluno *AD* pergunta: *Nesse meu gráfico eu posso afirmar que os filhos demoram mais tempo para responder o jogo do que os parentes?*; ou quando a aluna *PB* conclui: *Se eu olhar para o gráfico eu vejo que a massa do filho aumenta conforme a da mãe, mas não necessariamente isso vai sempre acontecer porque eu posso ser bem magra e minha mãe gordinha ou vice versa;* fica claro o trabalho investigativo destes alunos e o quão proveitoso foi. Ainda nesta perspectiva, quando o aluno *LF* descobre que a reta não está tocando o máximo de pontos possíveis, mas sim passando pela menor distância entre todos os pontos, também se evidencia um forte momento de IM.

A segunda atividade também preservou o caráter tecnológico e investigativo. Contudo, nesta etapa, usamos os momentos históricos estudados na atividade anterior para abordar um problema atual: a antropometria.

Nesta segunda atividade, os alunos escolheram duas variáveis (uma dependente e outra independente) relacionadas ao corpo humano e coletaram dados dos seus colegas de turma. Os registros geraram, em cada grupo, uma tabela de duas colunas na qual foram investigadas situações de relação, função injetora, sobrejetora e bijetora. Embora carregado de formalismo matemático, os alunos não demonstraram muitas dificuldades em compreender o significado de cada conceito.

As tabelas geraram novos gráficos no *software*, com novas investigações e estimativas.

Nesta atividade, a criatividade dos alunos foi claramente percebida. Eles usaram as letras das blusas para estabelecer o intervalo de elementos que continham no contradomínio; pensaram em uma situação atípica para encontrar um exemplo de função injetora (uma camisa feita com o objetivo de ser mencionada no livro dos recordes, mas que não caberia em nenhum ser humano); denominaram o conjunto imagem como conjunto reflexo, quando ainda não sabiam o termo matemático utilizado. Este estímulo à criatividade também é previsto pelos autores que defendem o uso das HM e das TIC no ensino.

Além de todas as habilidades desenvolvidas e provocadas nos estudantes, o uso do computador para resolver as atividades também nos permitiu adaptar o processo histórico, de modo que não necessitássemos usar as derivadas parciais para ajustar os pontos à reta. Esse processo, como vimos, é feito pelo Método dos Mínimos Quadrados. Embora tenha sido ocultado de nossas atividades, a pesquisa da vida e obra de Legendre, criador do método, nos comprovou que existem raros trabalhos neste sentido. Assim, optamos por fazer dos resultados dessa pesquisa, realizada inicialmente para explicar como se dava a estimativa da função de regressão, uma contribuição a futuros pesquisadores.

Por fim, nosso trabalho não atendeu às necessidades de todos os alunos. Os resultados dos questionários mostraram estudantes insatisfeitos e que, inclusive, afirmaram ter reduzido o conhecimento sobre os conceitos matemáticos abordados. Embora estes sejam a minoria, não podemos nos dar

por satisfeitos. Nossa experiência com a aplicação da proposta não resultou apenas em um caderno de atividades. Baseado em nossos estudos, observações e análises, identificamos pontos que podem ser aperfeiçoados pelo docente que vier a utilizá-lo em suas aulas. Tais pontos são listados detalhadamente nas dicas para o professor, ao fim de cada atividade.

Na esperança que este trabalho contribua para o ensino de Funções Afim e Estatística Básica de modo a tornar o processo de ensino e aprendizagem destes conceitos mais motivador, interessante, contextualizado e humanizado, trazemos nossas referências, bem como nosso caderno de atividades e demais documentos utilizados ao longo das aplicações, nos apêndices que seguem.

REFERÊNCIAS

ARENALES, S.; DAREZZO, A. **Cálculo Numérico**: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ARQUITETURA da destruição. Diretor e roterista: Peter Coen. Suécia: Filmes da Mostra, 1992. (121 min.), color.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e a Perspectiva sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, v. 2., 2003, Santos, SP. **Anais**...Santos, SP: SBM, 2003. p. 1-13. Disponível em: <http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/142008-11-01-15-44-48.pdf> . Acesso em: 08 out. 2014.

BAYER, A.; et al. **A Estatística e sua História**. In: XII Simpósio Sulbrasileiro de Ensino de Ciências, 2004, Canoas. Disponível em: <www.exatas.net/ssbec_estatistica_e_sua_historia.pdf> . Acesso em: 11 out. 2014.

BERTOLO, L. A. **Estatística Aplicada no Planilhas eletrônicas**. IMES Catanduva, 2010. Disponível em: << http://www.bertolo.pro.br/matematica/Disciplinas/3ano/Estatistica/Bimestre2/EstatisticaAplicada3.pdf> . Acesso em: 24 dez. 2014.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994, p. 15-80.

BORBA, M. C. **Softwares e internet na sala de aula de matemática**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Salvador-BA. Disponível em: <www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF> . Acesso em: 08 out. 2014.

_____. Coletivos Seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. In: Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 1., 2001, Curitiba. **Anais**... Curitiba: UFPR, PUCPR, Universidade Tuiuti do Paraná, 2001.

BORBA, M. C,; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio**: matemática**.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2012. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=10221&Itemid=.> . Acesso em: 31 out. 2014.

BRAUMANN, C. A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística**: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CANÊDO, L. B. **A Revolução Industrial**. São Paulo: Atual, 1994.

CHEMELLO, M. **Photo taken in Saint-Germain-l'Auxerrois**, Paris, France. Panorâmio. 2010. Disponível em: <http://www.panoramio.com/photo/33998191> Acesso em 20 jun. 2015.

CONNOR, J. O.; ROBERTSON, E. F. Adrien-Marie Legendre. **The MacTutor History of Mathematics archive**. 1999. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html> . Acesso em: 02 out. 2014.

CONT, V. D. Francis Galton: eugenia e hereditariedade. **Scientiae studia**, São Paulo, v.6, n.2, p.201-18, 2008. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ss/v6n2/04.pdf> . Acesso em: 31 out. 2014.

CORREIA, L. C. **O Extraordinário Fenômeno de Regressão à Média**. 2011. Disponível em: <http://medicinabaseadaemevidencias.blogspot.com.br/2011/06/o-extraordinario-fenomeno-de-regressao.html> Acesso em: 26 jul. 2015.

CRESPO, A. A. **Estatística Fácil**. São Paulo: Saraiva, 2009.

ENGELS, F. **A situação da classe trabalhadora na Inglaterra segundo observações do autor e fonte autênticas**. Tradução: B. A. Schumann. São Paulo: Boitempo, 2008.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FAUVEL, J.; MAANE, J. V. **History in Mathematics Education**. New York: Klumer Academic Publishers. 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Arquivo Pessoal Associados, 2009.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. In: 28ª REUNIÃO DA ANPED. **Anais...** Caxambu, 2005. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/funcionamento.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2015.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão. **Revista Cocar**, 2.4 (2011): 7-16, 2011.

FOSSA, J. A.; MENDES, I. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

GOULD, S. J. Três aspectos da evolução. In: BROCKMAN, J.; MATSON, Katinka. (Org.). **As coisas são assim**. São Paulo: Cia das Letras, 1997. p. 95-100.

HOBSBAWM, E. J. **A era das revoluções:** Europa 1789-1848. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1994.

LEGENDRE, A. M. **Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes**. Paris: Chez Firmin DIDOT, 1805.

MACHADO Jr, A. G.; SOARES, N. N.; GONÇALVES, T. O. **Introdução à pesquisa no/do ensino de Matemática**. Belém: ED.UFPA, 2008. Disponível em: < http://www.ufpa.br/par/files/Modulos/vol39.pdf>. Acesso: 31 out. 2014.

MEDEIROS, C. Por uma Educação Matemática como intersubjetividade. In: BICUDO, M. A. **Educação Matemática**. São Paulo: Centauro, 2005.

MEMÓRIA, J. M. P. **Breve História da Estatística**. Brasília: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. Disponível em: <www.im.ufrj.br/~lpbraga/prob1/historia_estatistica.pdf> . Acesso em: 10 out. 2014.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, A.; et al. **História da Matemática em Atividades Matemáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. 361f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História da Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MOREIRA, M. A. **Pesquisa em ensino**: aspectos metodológicos. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2003.

MUNIZ, C. A.; GONÇALVES, H. J. L. A Educação Estatística no Ensino Fundamental: discussões sobre a práxis de professoras que ensinam Matemática no interior de Goiás. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, ano 12, n. 18/19, dez. 2005. p.26-34.

NASCIMENTO, D**. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados à estimativa do Salário mínimo no plano real no período de 1994-2013.** Angicos/RN: UFERSA, 2013. Disponível em: << http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/232/TCC%20-%20Daiany%20Melise%20Melo%20do%20Nascimento.pdf>. Acesso em: 24 dez. 2014.

NUÑEZ, P. **Análisis de regresión y correlación lineal y múltiple**. Estadistica General, 2011. Disponível em: <http://www.monografias.com/trabajos96/analisis-regresion-y-correlacion/analisis-regresion-y-correlacion.shtml#ixzz3FO9fCGNK.>. Acesso em: 24 dez. 2014.

NÚÑEZ; I. B.; RAMALHO, B. L. **Aprendendo com o ENEM**: Reflexões para melhor se pensar no ensino e a aprendizagem das ciências naturais e da matemática. Brasília: Liber Livro, 2011.

OTAVIANO, H. **Método dos mínimos quadrados com formalismo matricial**: guia do usuário. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

PAVÃO, A. C. **Orientações para novos APCNS.** Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Diretoria de Avaliação. Brasília: CAPES, 2012. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/Criterios_APCNs_Ensino.pdf> Acesso em: 16 set. 2015.

PEARSON, K. **The Life, Letters and Labours of Francis Galton**. Vol. 2. Cambridge: University Press, 1924.

_____. Chapter XIV: Correlation and the application of statistics to the problems of heredity. In: **The Life, Letters and Labours of Francis Galton**. Vol. 3. Cambridge: University Press, 1930.

PONTE, J. P. Novas tecnologias na aula de Matemática. In: **Educação e Matemática**. n.34. Lisboa: APM, 1995, p.2-7. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4470/1/95-Ponte%20EM%2034.pdf> . Acesso em: 31 out. 2014.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PORTER, T.M. **The Rise of Statistical Thinking**, 1820-1900. Princeton: Princeton University Press, 1986.

REIS, G**. Seja um fracassado**: Gustavo Reis no TEDxUnisinos 2012. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=ziQIxBjnYDQ&feature=player_embedded >. Acesso em: 24/07/2013.

REIS, J. C. **História e Teoria**: historicismo, modernidade, temporalidade e verdade. Rio de Janeiro: FGV, 2006.

ROSE, H.; ROSE, S. The legacies of Francis Galton. **The Lancet.** v. 377 abril 23, 2011.

SALSBURG, D. **Uma senhora toma chá**: como a Estatística revolucionou a ciência no século XX. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E. **História da Psicologia Moderna**: tradução da 9ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SILVA, A. C. V.; et al. O que as pesquisas mostram sobre o uso da calculadora em sala de aula. In: **O Uso da Calculadora nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. p. 45–52.

SILVA, M. A. R. R. **Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e suas obras em Teoria dos Números.** 2010. 256 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2010.

SMITH, G. **Do Statistics Test Scores Regress Toward the Mean?**, Claremont, CA: Pomona College, 1997, 42–45. Disponível em: < http://economics-files.pomona.edu/GarySmith/StatsRegress/StatsRegress.html>. Acesso em 02 nov. 2014

SOCAS, M. M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. In: RICO, L.; et al **La educación matemática en la enseñanza secundaria**, Barcelona: ICE, 1997, p.125-154.

STEPAN, N. L. **The hour of eugenics: race, gender, and nation in Latin América**. Ithaca/London: Cornell University Press, 1991.

STIGLER, S. M. **The history of statistics**: the measurement of uncertainty before 1900. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986.

_____. **Statistics on the table**: the history of statistical concepts and methods. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1999.

SZWARCWALD, C. L & CASTILHO, E. A. The Paths of Statistics and its Incursions through Epidemiology. **Cad. Saúde Públ**., Rio de Janeiro, 8 (1): 05-21, jan/mar, 1992.

TENNENBAUM, J. **How Gauss Determined The Orbit of Ceres**. 2006. Disponível em: < www.schillerinstitute.org/fid_97-01/982_orbit_ceres.pdf>. Acesso em 20 jun. 2015.

UCL, Main Library. Londres. Disponível em: <http://www.ucl.ac.uk/library/exhibitions/francis-galton/> Acesso em: nov. 2014.

UNIVESITY COLLEGE, London. Disponível em: <http://content.dnalc.org/content/c11/11907/11907.jpg>. Acesso em: 27 jun 2015

VALENTE, J. A. Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica. In: VALENTE, J. A. (org.) **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VIEIRA, V. Brasil é um dos últimos em teste que avalia capacidade de resolver problemas. **O Estadão de São Paulo**, São Paulo, 1 abr. 2014. Disponível em: < http://www.estadao.com.br/noticias/vida,brasil-e-um-dos-ultimos-em-teste-que-avalia-capacidade-de-resolver-problemas,1147710,0.htm> . Acesso em: 08 out. 2014.

VUOLO, J. H. **Fundamento da teoria dos erros**. São Paulo: Blucher, 1996.

ANEXO A

EMENTA DO CURSO DE MATEMÁTICA DA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NO IFRN

ANEXO I – PROGRAMAS DAS DISCIPLINAS PARA OS CURSOS TÉCNICOS INTEGRADOS "REGULARES"

Curso:	**Técnico de Nível Médio em**	Forma/Modalidade(s):	**Integrado**
Disciplina:	**Matemática I**	Carga-Horária:	**120 h** (160 h/a)

EMENTA

Conjuntos numéricos. Equações de 1º e 2º graus. Sistemas de equações. Expressões algébricas; fatoração e produtos notáveis. Razões e proporções. Trigonometria no triângulo retângulo. Funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica.

PROGRAMA

Objetivos

- Identificar diferentes representações e significados de números e operações no contexto social.
- Identificar, transformar e traduzir valores apresentados sob diferentes formas de representação.
- Elaborar estratégias de resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas em casos redutíveis ao estudo do triângulo retângulo.
- Aplicar o conceito de função na modelagem de problemas e em situações cotidianas utilizando a linguagem algébrica, gráficos, tabelas e outras maneiras de estabelecer relações entre grandezas.
- Descrever através de funções o comportamento de fenômenos nas outras áreas do conhecimento como a Física, a Química, a Biologia e a Economia.
- Aplicar o estudo dos pontos críticos de uma função quadrática na modelagem de situações-problema.
- Utilizar diferentes estratégias de resoluções de problemas envolvendo conceitos básicos da matemática.

Bases Científico-Tecnológicas (Conteúdos)

1. **Aritmética e Álgebra**: Revisão e aprofundamento de tópicos fundamentais do ensino fundamental com ênfase no estudo: dos números inteiros, racionais, irracionais e reais; propriedades do módulo de um número real; das equações de primeiro e segundo graus; dos sistemas lineares com duas incógnitas; dos produtos notáveis e fatoração; da proporcionalidade, da regra de três.

2. **Geometria plana e introdução à Trigonometria**: Estudo das propriedades das formas geométricas básicas e das unidades de medidas de comprimento e área. Estudo da semelhança de triângulos, do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas no triângulo retângulo com ênfase na conceituação e nas aplicações em situações envolvendo seno, cosseno ou tangente.

3. **Conjuntos**: Conceituação e operações com conjuntos com ênfase na resolução de problemas e nas operações com intervalos.

4. **Introdução ao estudo das Funções**: Conceituação de função (incluindo as definidas por mais de uma sentença matemática) através de conjuntos e de situações cotidianas com ênfase ao estudo das funções via suas representações gráfica, algébrica e por meio de tabelas. Classificações das funções, função composta e função inversa.

5. **Função polinomial do 1º e do 2º grau**: Conceituação de função afim e quadrática através de situações cotidianas com ênfase ao estudo das representações gráfica e algébrica; das raízes e dos pontos críticos (máximos e mínimos). Inequações de 1º e 2º graus,

6. **Função modular**: conceituação, equação modular, representação gráfica, aplicações.

7. **Função exponencial**: Conceituação de função exponencial através das representações gráfica e algébrica e da resolução de problemas.

8. **Função logarítmica**: Conceituação de função logarítmica através dos logaritmos e suas propriedades básicas. Ainda, estudo das representações gráfica e algébrica e aplicações dos logaritmos em outras áreas do conhecimento.

Procedimentos Metodológicos

Aulas dialogadas nas quais se deve priorizar a utilização de diferentes instrumentos (gráficos, tabelas, textos, figuras...) para discussões de situações cotidianas onde a aritmética, a álgebra básica ou geometria sejam ferramentas essenciais no processo educativo. Priorizar situações cotidianas que possam ser problematizadas e geradoras de discussão envolvendo determinação de distâncias inacessíveis, a modelagem de fenômenos através das funções, as aplicações reais dos logaritmos, a análise gráfica e de tabelas, entre outras. Ainda existe a possibilidade de se explorar a matemática como ferramenta em outras áreas do conhecimento (geografia, física, economia, engenharia, arquitetura...) através do estudo das funções e da introdução ao estudo da trigonometria.

Recursos Didáticos

Livro didático como referência para leitura de conteúdos e resolução de exercícios. Roteiros com atividades produzidas ou adaptadas pela equipe. Recursos multimídia (informatizados) para o estudo de gráficos, figuras e tabelas. Recursos de sala de aula como: quadro, apagador, marcador para quadro branco. Materiais diversos, como papel quadriculado, régua, esquadro, compasso, geoplano (com tábua de pregos e elásticos), calculadoras, softwares matemáticos, internet e outros.

Avaliação

O educador poderá utilizar a elaboração de textos individuais ou em grupo, discussão de temas, relatórios de aulas experimentais, apresentação de seminários, entre outros, para avaliar o educando. A avaliação poderá ser realizada também de forma específica, por meio de provas, pesquisas realizadas, relatórios de projetos, estudo de casos, sínteses de trabalho, confecção de gráficos, tabelas, experimentos, coletas, análise crítica de trabalhos de campo e outros instrumentos que se façam necessários e viáveis para o desenvolvimento da aprendizagem.

Bibliografia Básica

1. PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** (vol. 1, 2, 3) - 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.
2. BARROSO, J.M. (Ed.) **Conexões com a matemática.** (vol. 1, 2, 3) - 1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2010.
3. IEZZI,Gelson. [et al.]. **Ciência e Aplicações.** (vol. 1, 2, 3) - 5ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
4. RIBEIRO, Jackson. **Matemática: Ciências, Linguagem e Tecnologia** (vol. 1, 2, 3) - 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2012.

Bibliografia Complementar

1. LIMA, Elon Lajes [et al]. **A Matemática do Ensino Médio** (vol. 1, 2, 3). Rio de Janeiro: SBM, 2008.
2. IEZZI, Gelson [et al]. **Fundamentos de Matemática Elementar** (vol. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11). São Paulo: Atual, 2005.

Software(s) de Apoio:

Maple, poli, winplot, softwares de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas.

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO PRÉ-PROJETO AOS ALUNOS

Caro aluno, este questionário é parte fundamental de uma pesquisa de Mestrado acerca do uso da História da Matemática e das Tecnologias no ensino de funções e estatística. Pedimos gentilmente que responda as questões de forma verdadeira.

SOBRE O ENTREVISTADO

1. Sexo: ( ) Feminino ( ) Masculino 2. Idade: _____

3. Quantas vezes já cursou a 1ª Série do Ensino Médio?
( ) Esta é a primeira vez.
( ) Esta é a 2ª vez.
( )Esta é a 3ª vez.
( ) Esta é a 4ª ou mais vezes.

4. Cursou o ensino fundamental (de 6° a 9° ano):
( ) Todo em escola pública.
( ) Todo em escola privada.
( ) Parte em escola pública e parte em escola privada.

SOBRE OS CONTEÚDOS APRENDIDOS

1. Você estudou **<u>função polinomial do 1º grau</u>** (função afim) no ensino fundamental (9° ano)?
( ) Sim, foi suficiente para que eu aprendesse sobre o assunto.
( ) Sim, mas não foi suficiente, pois aprendi pouco sobre o assunto.
( ) Sim, mas não foi suficiente, pois não aprendi nada sobre o assunto.
( ) Não estudei.
( ) Não me lembro.

2. Você estudou **<u>gráfico</u>** de função afim no plano cartesiano, durante o 9° ano?
( ) Sim, foi suficiente para que eu aprendesse sobre o assunto.
( ) Sim, mas não foi suficiente, pois aprendi pouco sobre o assunto.
( ) Sim, mas não foi suficiente, pois não aprendi nada sobre o assunto.
( ) Não estudei.
( ) Não me lembro.

Caso tenha respondido "sim" na questão 1 e/ou 2, cite o que lembra sobre função afim e gráfico?

_____

_____

_____

3. Você estudou **estatística (construção e interpretação de tabelas e gráficos)** em algum momento do seu ensino fundamental?

( ) Sim, foi suficiente para que eu aprendesse sobre o assunto.
( ) Sim, mas não foi suficiente, pois aprendi pouco sobre o assunto.
( ) Sim, mas não foi suficiente, pois não aprendi nada sobre o assunto.
( ) Não estudei.
( ) Não me lembro.

Caso tenha respondido "sim" na questão 3, cite o que lembra sobre Estatística?

_____

_____

_____

SOBRE OS RECURSOS TECNOLÓGICOS

1. Você já usou o **Excel** ou outro software de planilhas eletrônicas (com o Calc)?
( ) Várias vezes.
( ) Algumas vezes.
( ) Apenas uma vez.
( ) Nunca usei.

2. Você já teve alguma aula de Matemática usando o **computador**?
( ) Várias vezes.
( ) Algumas vezes.
( ) Apenas uma vez.
( ) Não lembro.

3. Qual sua opinião acerca de aulas de Matemática em um **laboratório de informática**?
( ) Não gosto, não acho produtivo.
( ) Acho interessante e produtivo.
( ) Outra. Qual? _____

_____

_____

SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

1. Você já fez alguma atividade de Matemática que continha a História da Matemática?
( ) Várias vezes.
( ) Algumas vezes.
( ) Apenas uma vez.
( ) Não lembro.

2. Qual sua opinião acerca de aulas de Matemática trabalhando com a **História da Matemática**?
( ) Não gosto, não acho produtivo.
( ) Acho interessante e produtivo.
( ) Outra. Qual? _____

_____

_____

3. Você já ouviu falar de Francis Galton?
( ) Nunca.
( ) Sim. Como, por quem e/ou o quê? _____

_____

_____

SOBRE NOVAS METODOLOGIAS

1. Qual a sua opinião sobre estudar função afim e estatística usando a História da Matemática e recursos tecnológicos?

_____

_____

_____

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO PÓS-PROJETO AOS ALUNOS

Caro aluno, este questionário visa saber o grau de satisfação de sua turma quanto as atividades pautadas na História da Matemática atrelada as Tecnologias de Informação e Comunicação, realizadas, além de averiguar os conhecimentos adquiridos.

PARA CADA ITEM A SEGUIR DÊ UMA NOTA DE 0 A 10 ONDE 0 SIGNIFICA TOTALMENTE INSATISFEITO E 10 SIGNIFICA TOTALMENTE SATISFEITO.

1. Uso do laboratório de informática para as pesquisas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Uso do Excel para construção dos gráficos.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3. Texto histórico sobre a vida e a obra de Francis Galton (1822 - 1911)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

4. Seu aprendizado sobre funções afins.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Seu aprendizado sobre gráficos de funções afins.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

6. Seu aprendizado sobre coleta de dados e construção de gráficos de dispersão.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7. O uso da História da Matemática e a História da Estatística para aprender conteúdos matemáticos e estatísticos.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

8. O uso da História da Matemática com o apoio dos recursos tecnológicos (computador, internet, vídeos).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

9. O uso da História da Matemática sem o apoio dos recursos tecnológicos (no momento das atividades manuais).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

PARA CADA ITEM A SEGUIR DÊ UMA NOTA DE 0 A 10 ONDE 0 SIGNIFICA DESINTERESSANTE E 10 SIGNIFICA INTERESSANTE.

1. A coleta dos seus dados e os dados dos seus parentes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. A coleta de dados dos alunos da sua turma.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3. Estudo da relação das características dos alunos da turma e seus respectivos parentes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

4. Estudo da relação das medidas dos alunos e suas peças de roupas e acessórios.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Elaboração do relatório.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

6. As perguntas da atividade 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7. As perguntas da atividade 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

SOBRE AS POSSÍVEIS MUDANÇAS APÓS AS ATIVIDADES

1. Você acha que após as atividades, o seu conhecimento sobre funções afim:

( ) aumentou.
( ) reduziu.
( ) continuou o mesmo de antes, pois já sabia desse assunto.
( ) continuei sem aprender.

2. Você acha que após as atividades, o seu conhecimento sobre gráficos de funções afim:

( ) aumentou.
( ) reduziu.
( ) continuou o mesmo de antes, pois já sabia desse assunto.
( ) continuei sem aprender.

3. Você acha que após as atividades, o seu conhecimento sobre Estatística:

( ) aumentou.
( ) reduziu.
( ) continuou o mesmo de antes, pois já sabia desse assunto.
( ) continuei sem aprender.

SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O USO DO COMPUTADOR COMO METODOLOGIA

1. Você acha que conhecer a História de Francis Galton e como ele provou sua teoria usando funções afins e Estatística foi:

( ) Improdutível, pois não influenciou em nada no seu aprendizado.
( ) Improdutível, pois atrapalhou/dificultou o seu aprendizado.
( ) Interessante, mas não o fez aprender melhor sobre os assuntos.

( ) Útil, pois aprendeu com mais facilidade sobre os assuntos.
( ) Outro. Qual? _____

_____

_____

Justifique a resposta da sua marcação:

_____

_____

_____

2. Você acha que fazer pesquisas na internet para responder as questões e trabalhar com o *Excel foi*:

( ) Improdutível, pois não influenciou em nada no seu aprendizado.
( ) Improdutível, pois atrapalhou/dificultou o seu aprendizado.
( ) Interessante, mas não o fez aprender melhor sobre os assuntos.
( ) Útil, pois aprendeu com mais facilidade sobre os assuntos.
( ) Outro. Qual? _____

_____

_____

Justifique a resposta da sua marcação:

_____

_____

_____

_____

REFLEXÕES E SUGESTÕES SOBRE A PROPOSTA

1. Qual momento da proposta achou mais relevante/interessante? Descreva brevemente.

_____

_____

_____

_____

2. Na sua opinião, alguma(s) da(s) atividade(s) deveria(m) ser refeita(s) ou dispensada(s)? Qual(is)? Por quê?

_____

_____

_____

_____

3. Algumas das atividades foram feitas manualmente e outras no computador. Acerca disso, você acha que:

( ) A atividade manual foi melhor.
( ) A atividade no computador foi melhor.
( ) Uma complementou/ajudou na realização da outra.

( ) A atividade manual não se relacionou com a do computador, sendo ambas, independentes.

OBS: Pode marcar mais de um item.

4. Você preferia que os assuntos estudados fossem cobrados SEM a História da Matemática?

( ) Sim. Por quê? _____

_____

_____

( ) Não. Por quê? _____

_____

_____

APÊNDICE C

CRONOGRAMA DO 2° BIMESTRE DA TURMA

Professora Juliana Schivani - juliana.schivani@ifrn.edu.br - Disciplina de Matemática
Material de aulas: docente.ifrn.edu.br/julianaschivani

ANO: 2015
PERÍODO: 2° BIMESTRE (10/07 - 15/09)
TURMA: EDIFICAÇÕES (1.1101.1V)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE Campus Natal - Central

CRONOGRAMA DO 2° BIMESTRE (sujeito a mudanças)				
Tipos de funções (injetora, sobrejetora, bijetora) **Domínio, Imagem e contra-domínio de uma função** **Função afim** **Função quadrática**				
AULA n°	**DATA**	**DIA**	**QTD DE AULAS**	**CONTEÚDO / ATIVIDADE**
2	13/jul	seg	2	*Projeto (atividade 1 - apresentação da vida e obra de Galton e da atividade)* ***LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA***
4	15/jul	qua	2	*Projeto (atividade 1 - apresentação da vida e obra de Galton e da atividade)* ***LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA***
6	16/jul	qui	2	*Projeto (atividade 1 - reunião dos dados coletados em um plano cartesiano e o ajuste e previsão manual)*
8	20/jul	seg	2	*Projeto (atividade 1 - usar o Excel para o ajuste e previsão, comparando e analisando as semelhanças e diferenças)* ***LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA***
10	22/jul	qua	2	Projeto (atividade 1 - usar o Excel para o ajuste e previsão, comparando e analisando as semelhanças e diferenças) ***LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA***
12	23/jul	qui	2	*Projeto (atividade 1 - relatório)*
14	29/jul	qua	2	*Projeto (atividade 2 - coleta de dados dos próprios alunos justificado pelo vídeo com a reportagem)*
16	30/jul	qui	2	*Projeto (atividade 2 - tratamento e análise dos dados no Excel)* ***LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA***
18	04/ago	ter	2	*Projeto (atividade 2 - apresentação)*
20	06/ago	qui	2	*Projeto (atividade 2 - apresentação)*
22	11/ago	ter	2	*Projeto (atividade 2 - relatório)*
24	13/ago	qui	2	Finalização do projeto
26	18/ago	ter	2	
28	20/ago	qui	2	Função quadrática e a fórmula de Bhaskara
30	25/ago	ter	2	Estudo do sinal/gráfico da função quadrática
32	27/ago	qui	2	Máximo e Mínimo de uma função (vértice da parábola)
34	01/set	ter	2	***Atividades com o GeoGebra no laboratório de informática***
36	03/set	qui	2	Inequações do 1º e 2º grau
38	08/set	ter	2	Exercícios
40	10/set	qui	2	Exercícios
42	15/set	ter	2	***Avaliação individual (Função afim e quadrática)***
44	17/set	qui	2	Correção da avaliação

OBS1: Todas as atividades e avaliações valerão sempre 100 pontos, sendo posteriormente atribuido pesos.
OBS2: Para o caso de ausência em atividades de sala de aula, o(s) ausente(s) farão a prova com peso maior.
OBS3: Reposição de avaliações só serão feitas quando solicitadas dentro do prazo e mediante comprovação.

AVALIAÇÕES DO BIMESTRE:

Média arimética de todas as atividades avaliativas realizadas no bimestre

APÊNDICE D

ATIVIDADE HISTÓRICA 1

Nível de ensino para realização:

1ª série do Ensino Médio

Assuntos abordados nessa atividade:

- Pares ordenados;
- Plano cartesiano;
- Diferenças e semelhanças de função e relação;
- Noções de função injetora, sobrejetora e bijetora;
- Gráfico de função afim;
- Crescimento e decrescimento da função;
- Estudo dos coeficientes angular e linear da função afim;
- Gráficos de dispersão;
- Resolução de sistemas de 2 equações lineares *(opcional)*;
- Noção de média aritmética *(opcional)*;
- Noção de porcentagem *(opcional)*.

Conhecimentos prévios:

Noções de função afim e quadrática e gráficos dessas funções, vistas no 9° ano do Ensino Fundamental (É recomendado fazer uma aula de revisão desses assuntos antes da aplicação do projeto).

Organização:

Atividade individual (podendo formar duplas no encontro computacional).

Recursos necessários:

- Papel quadriculado;
- Papel A4;
- Lápis;
- Régua;
- Transferidor;
- Computador com um *software* de planilha eletrônica;
- Internet;
- Fita métrica;
- Balança;
- Projetor multimídia.

Tempo de realização:

5 encontros (o ideal é que cada encontro represente um dia contendo três aulas, cada uma com duração de 45 minutos).

Objetivos da atividade:

- Conhecer e refletir criticamente acerca da História de Francis Galton (1822-1911) e o percurso que culminou na Eugenia[1];
- Recriar um dos experimentos realizados por Galton para comprovar sua teoria, fazendo uso de planilhas eletrônicas;
- Construir um gráfico de dispersão com base na coleta de dados de pais e filhos;
- Ajustar os pontos dispersos do gráfico a uma reta e, via a investigação matemática, estimar a melhor função de ajuste;
- Fazer estimativas usando função, com e sem recurso tecnológico, e concluir se Galton tinha ou não razão em sua teoria.

Cronograma:

Encontro:	Atividade realizada:	Local da atividade:	Páginas usadas:
1º encontro	Estudo da vida e obra de Francis Galton (1822-1911), bem como apresentação/introdução da proposta da atividade de recriação do experimento sobre Eugenia (1875).	Laboratório de informática	De 4 a 13
2º encontro	Atividades de pesquisa na internet sobre os estudos de Galton acerca da Regressão Linear. Encaminhamento de atividade extraclasse de coleta de dados realizada pelos alunos.	Laboratório de informática	De 14 a 16.
3º encontro[2]	Retomada e reunião dos dados coletados na atividade encaminhada no encontro anterior; Representação dos dados em um plano cartesiano (um para cada tipo de dado) em papel quadriculado; Ajuste de pontos em uma reta; Investigação da melhor função que representa a reta traçada; Fazer previsões com a função estimada.	Sala de aula com projeção	De 17 a 18.
4º encontro	Inserir os dados coletados em um *software* de planilhas eletrônicas;	Laboratório de	

[1]Ciência criada por Francis Galton. Mais detalhes sobre seu significado serão abordados nas atividades que seguem.

[2]Ao final do segundo encontro, os alunos deverão coletar os seus dados e dos seus parentes, precisando de um tempo significativo para a execução deste trabalho. Dessa forma, recomendamos que o terceiro encontro não seja no dia seguinte ao final do segundo encontro.

	Construir, no *software*, um gráfico de dispersão para cada conjunto de dados coletados; Verificar a função que o *software* fornece ao gráfico, comparando-a com a estimada manualmente, no encontro anterior; Fazer previsões com a nova função; Analisar os resultados criticamente, concluindo se Galton estava correto em sua teoria.	informática	De 19 a 24.
5º [3]encontro	Elaboração de um relatório (conforme roteiro disponibilizado na página 18) contendo todo o procedimento realizado na atividade de recriação do encontro histórico (experimento de Galton); Socialização e discussão dos resultados obtidos com a turma; Análises e conclusões.	Sala de aula com projeção	

Avaliação:

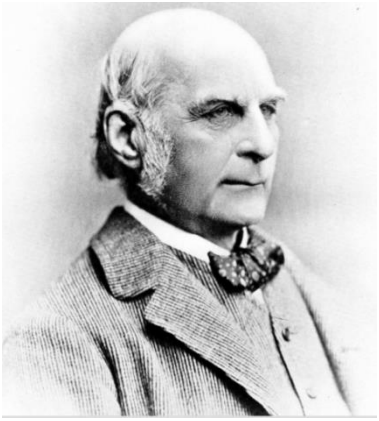
Além da avaliação continuada, levando em consideração a participação ativa, assiduidade e autonomia de cada aluno, atividades e relatórios escritos também complementarão a avaliação da aprendizagem de cada estudante.

[3]Dependendo do interesse e envolvimento da turma pela atividade, talvez seja ideal separar um dia para a elaboração do relatório e outro para as socializações. Outra opção é pedir que façam o relatório em casa e reservem o último encontro apenas para as discussões.

1º ENCONTRO:

Um estudo da vida e obra de Francis Galton (1822-1911) e apresentação da proposta da atividade de recriação do experimento da Eugenia.

Figura 1 – Fotografia de Francis Galton (1822-1911) aos 73 anos



Fonte: Pearson (1924, p.1).

Francis Galton nasceu em 1822, nas proximidades de Birmingham, Inglaterra. Era o mais novo dentre os seus nove irmãos e por insistência do seu pai, aos 16 anos, foi estudar medicina no Birmingham General Hospital, como assistente de médico. Por curiosidade, começou a tomar, em ordem alfabética, os medicamentos da farmácia do hospital, registrando os efeitos causados por cada um deles. Segundo Schultz, D. P. e Schultz, S. E. (2013, p.136), "essa aventura científica teve fim na letra 'C', quando tomou uma dose de óleo de cróton, um forte laxante".

Quando Galton tinha 22 anos, seu pai faleceu, deixando-o herdeiro de uma grande fortuna. Nessa mesma época, o jovem abandonou a medicina e viajou por toda a África, fazendo viagens difíceis e perigosas somente por prazer. Há indícios de que foi nesta viagem que Galton contraiu uma doença venérea, motivo possível por não ter tido filhos.

Parou de viajar aos 28 anos, quando se casou. Ainda assim, publicou histórias sobre suas viagens. Um guia intitulado *The Art of Travel* (A Arte de Viajar). Fez tanto sucesso que "foi publicado em oito edições, em oito anos, e reimpresso em 2001" (SCHULTZ, D. P.;SCHULTZ, S. E., 2013, p.136). Também recebeu uma medalha da *Royal Geographic Society* (Sociedade Real de Geografia) pela publicação. Nos anos seguintes, interessou-se por estudos meteorológicos que resultou no desenvolvimento do tipo de mapa meteorológico utilizado até hoje.

Salsburg (2009) comenta que Galton ficou conhecido por *descobrir* as impressões digitais. Isso porque Galton também se interessou por este estudo. Galton observou que as impressões digitais são únicas em casa indivíduo e criou métodos para identificar e classificar essas impressões. As marcas e cortes irregulares de cada dedo são chamadas até hoje de marcas de Galton. (SALSBURG, 2009). Seu estudo originou o método de identificação criminal adotado pela polícia de Londres em 1901 e posteriormente difundida no mundo inteiro.

Na figura 2, a seguir, observamos a impressão da própria mão do matemático.

Figura 2 – Registro da impressão da mão de Galton realizada pelo próprio

Fonte: UCL (s/d, s/p).

Francis Galton era fascinado por medidas. Media o tamanho de cabeças, narizes e membros, o número de vezes que as pessoas remexiam as mãos e os pés enquanto assistiam a uma aula. Mediu até mesmo a ineficácia das orações através da observação do comportamento das pessoas (a frequência com que bocejavam ou batiam as pernas) nas igrejas enquanto acompanhavam uma missa. (MLODINOW, 2009)

A mãe de Galton, Frances Ann Violeta Darwin (1783-1874), era neta de Erasmus Darwin (1731-1802), que por sua vez era avô de Charles Darwin (1809-1882), donde se estabelece o parentesco entre Galton e Charles Darwin; eram primos.

A palavra eugenia foi cunhada pelo próprio Galton em 1833 a partir das palavras gregas *eu* (bom) e *genos* (nascimento) e significava para ele um novo campo de estudos, baseado nas ideias iniciais do seu primo *Darwin*. Mas você sabe o que a eugenia

estuda? Faça uma pesquisa rápida, porém cuidadosa, na internet e, com suas próprias palavras, responda as seguintes questões:

1. O que é Eugenia e quais são seus objetivos?

2. Em que consiste o estudo da seleção natural de Charles Darwin e o que ele tem a ver com a Eugenia?

3. Quais possíveis problemas a Eugenia traz para a sociedade?

4. Acha que a Eugenia tem a ver com Matemática? Caso sim, o quê? Caso não, acha que poderia ter?

Registre suas respostas no caderno e discuta com seus colegas de sala e professor, atentando-se às respostas diferentes das suas.

Charles Robert Darwin ou simplesmente Darwin, como ficou mais conhecido, era um biólogo inglês que conquistou seu espaço e fama com a publicação do livro A Origem das Espécies, em 1859, no qual divulgou pela primeira vez a Teoria da Evolução, resultado de uma viagem pelo mundo e de mais de 20 anos de estudos.

Na obra, Darwin explica sua teoria baseada na seleção natural das espécies. O biólogo tratou a evolução como um processo natural de mudança, isto é, uma descendência com modificação das espécies (GOULD, 1997). Com base nessa seleção natural, Galton propôs a seleção artificial, e criou a Eugenia, se transformando "de geógrafo amador em antropólogo e eugenista" (MEMÓRIA, 2004, p.22). Para Galton, tratava de um novo campo de estudos. Seu objetivo era melhorar a espécie humana com a procriação por casais selecionados.

Galton se dedicou com afinco a esse estudo e para dar continuidade aos trabalhos, a fortuna deixada pelo seu pai destinou,

> filantropicamente 45 mil libras esterlinas para a fundação de uma cátedra de Eugenia, na Universidade de Londres e, 200 libras esterlinas para a publicação de uma revista destinada às aplicações da Estatística à herança biológica, denominada Biometrika, cujo primeiro número saiu em 1901, e é publicada até hoje, sem interrupção, embora com a finalidade ampliada. Em 1904, fundou um laboratório de pesquisas sobre a genética humana, que veio a ser denominado Galton Laboratory of National Eugenics cujo primeiro diretor foi Karl Pearson, que com o próprio Galton, foram os fundadores da Escola Biométrica. Em reconhecimento as suas inúmeras contribuições, foi-lhe concedido o título honorífico de Sir, em 1909. (MEMÓRIA, 2004, p.25)

Por ter condições financeiras razoáveis, a Inglaterra foi o primeiro país a se industrializar. Isso aconteceu por volta de 1820 e até dez anos depois, a industrialização ainda era um fenômeno exclusivamente inglês. Fazendeiros abandonaram suas terras para viver na cidade, investir nas indústrias. Trabalhadores rurais se viram obrigados a se transformarem em proletariados para não morrer de fome. Mesmo com jornadas diárias excessivas, péssimos salários e más condições de trabalho, a imigração dos camponeses superlotou as cidades inglesas que não estavam preparadas, em termos estruturais, para recebê-los. As "novas cidades eram mais feias e seu proletariado mais pobre do que em outros países" (HOBSBAWM, 1994, p.69). Em 1850, entre os 2,5 milhões de habitantes em Londres, era fácil se deparar com ruas lotadas de pessoas vivendo em situações degradantes. O contraste entre os trabalhadores e a burguesia era demasiadamente significativa. O operário "não podia compreender racionalmente

porque precisamente ele, fazendo pela sociedade o que não faziam os ricos ociosos, tinha de suportar condições tão horríveis" (ENGELS, 2008, p.248). Dessa forma, o crescimento da população urbana foi acompanhado pelo aumento de roubos, assassinatos, prostituição e alcoolismo. Sem dinheiro para se alimentarem e vivendo sem o mínimo de higiene, milhares de pessoas morreram de epidemias. O governo pouco fazia para melhorar a situação dos pobres. Via tal situação não como um problema social, mas sim como prova da falta de caráter e de moralidade dos indivíduos pobres. "Sua pobreza atrai sobre ele a suspeição acerca de todos os delitos imagináveis" (ENGELS, 2008, p.313).

Diante deste contexto histórico, Francis Galton procurava sustentar que se não houvesse um controle da qualidade reprodutiva dos indivíduos da sociedade, em pouco tempo o resultado seria o avanço reprodutivo de pessoas degeneradas. Ou seja, "os melhores membros da sociedade seriam suplantados reprodutivamente pelos indivíduos menos qualificados" (CONT, 2008, p.207). Isso significava que a sociedade teria mais pessoas delinquentes, criminosas, com distúrbios mentais, dentre outras mazelas.

Galton acreditava que os aspectos físicos, o talento e a capacidade intelectual dos indivíduos eram heranças de seus pais. Também defendeu que essas características poderiam ser calculadas, administradas e estimuladas, por meio de casamentos criteriosos (CONT, 2008). Assim, criou a Eugenia como um novo ramo da ciência e se dedicou afinco às pesquisas que comprovasse sua teoria.

Stepan (1991) explica que a Eugenia abrange

> os usos sociais para que o conhecimento da hereditariedade pudesse ser colocado de forma a atingir a meta de 'melhor descoberta'. Outros, definiram eugenia como um movimento para 'melhorar' a raça humana ou, de fato, para preservar a 'pureza' de grupos particulares. Como ciência, a eugenia foi baseada na suposta nova compreensão das leis da hereditariedade humana. Como um movimento social, envolveu propostas que garantiu à sociedade uma melhoria constante da sua composição hereditária, incentivando a 'encaixar' os indivíduos em grupos e se reproduzirem. (STEPAN, 1991, p.1, tradução nossa)

Contudo, a Eugenia não incentivava apenas a reprodução de casais selecionados, mas também previa evitar a reprodução daqueles com características degenerativas.

Embora não haja indícios de que Galton tenha sido condizente com os alemães, Mldodinow (2009) afirma que a expressão e algumas ideias eugênicas foram adotadas pelos nazistas. De fato, em 1933, o governo nazista sancionou uma lei que permitia

esterilizar os doentes. Em 1935, Hitler cogitava a ideia de eliminar os indivíduos com doenças incuráveis, alegando que nos últimos 70 anos a população aumentou 50% enquanto que as doenças hereditárias em 450% (ARQUITETURA da destruição, 1992).

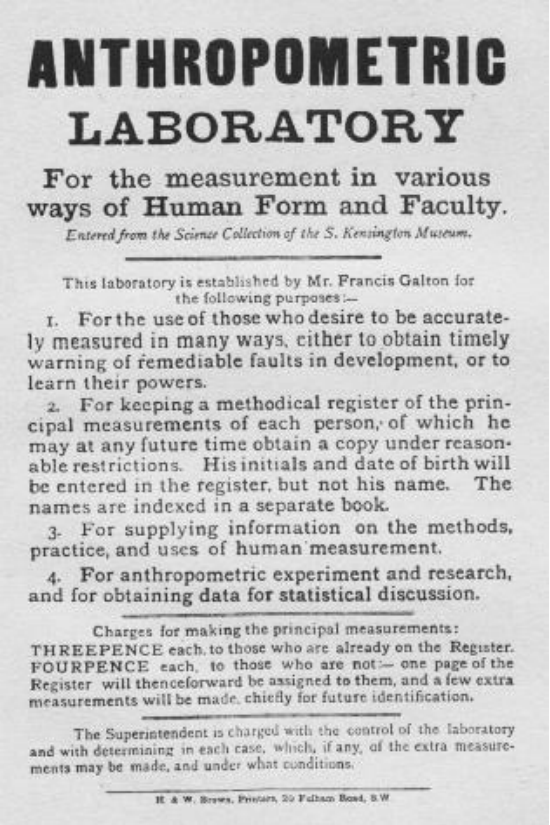
Galton tinha um conhecimento limitado sobre a hereditariedade, mas estava certo de que conseguiria comprovar sua teoria através da Estatística. Os dados a serem registrados e analisados proveriam das características que os progenitores e os seus ancestrais transmitiam à prole (CONT, 2008). Assim, em 1869 publicou o livro *Hereditary genius* (O gênio hereditário). O livro foi resultado de uma pesquisa biográfica de famílias de pessoas famosas, como artistas, militares, poetas e intelectuais de diversas áreas. Neste estudo, Galton

> aplicou os conceitos estatísticos aos problemas da hereditariedade e classificou os homens extraordinários da sua amostragem em categorias, conforme a frequência com que seus níveis de capacidade ocorriam na população. Os dados comprovaram que os homens notáveis apresentavam maior probabilidade de terem filhos extraordinários do que os homens comuns. A amostragem consistia em 977 homens famosos [...] esperava-se que a expectativa seria de haver no grupo apenas um parente importante, no entanto, havia 332. (SCHULTZ, D. P.;SCHULTZ, S. E., 2013, p.138)

Mesmo com estes estudos e publicações, Galton ainda necessitava de "uma teoria que descrevesse os mecanismos de transmissão tanto dos caracteres quanto dos talentos" (CONT, 2008, p.206). Assim, para obter mais dados estatísticos que pudesse analisar criteriosamente e usando a Matemática, Galton espalhou pelas ruas de Londres o cartaz dizendo:

> (1) Para uso daqueles que desejam ser medidos de diversas maneiras com exatidão, e também para conhecer a tempo defeitos remediáveis do desenvolvimento, e para conhecer os próprios poderes.
> (2) Para guardar um registro metódico das principais medidas de cada pessoa, do qual poderá, com algumas restrições razoáveis, obter no futuro uma cópia. Colocando suas iniciais e data de nascimento, mas não o seu nome. Os mesmos serão registrados em livro à parte.
> (3) Para obter informações sobre os métodos, práticas e usos das medidas humanas.
> (4) Para experimentação e investigação antropométricas, e para obter dados para discussão Estatística. (CONT, 2008, p.205)

Figura 3 – Carta do Laboratório Antropométrico de Galton



ANTHROPOMETRIC LABORATORY

For the measurement in various ways of Human Form and Faculty.

Entered from the Science Collection of the S. Kensington Museum.

This laboratory is established by Mr. Francis Galton for the following purposes:—

1. For the use of those who desire to be accurately measured in many ways, either to obtain timely warning of remediable faults in development, or to learn their powers.
2. For keeping a methodical register of the principal measurements of each person, of which he may at any future time obtain a copy under reasonable restrictions. His initials and date of birth will be entered in the register, but not his name. The names are indexed in a separate book.
3. For supplying information on the methods, practice, and uses of human measurement.
4. For anthropometric experiment and research, and for obtaining data for statistical discussion.

Charges for making the principal measurements: THREEPENCE each, to those who are already on the Register. FOURPENCE each, to those who are not:— one page of the Register will thenceforward be assigned to them, and a few extra measurements will be made, chiefly for future identification.

The Superintendent is charged with the control of the laboratory and with determining in each case, which, if any, of the extra measurements may be made, and under what conditions.

H. & W. Brown, Printers, 20 Fulham Road, S.W.

Fonte: Pearson (1924, p.358).

Mas Galton não estava interessado apenas nas medições físicas. Ele também acreditava ser possível os seres humanos herdarem dos seus antecedentes as características intelectuais. Baseando-se na visão do filósofo empirista John Locke (1632-1704), que acreditava no conhecimento adquirido por meio dos sentidos, Galton entendia que “as pessoas mais inteligentes teriam os sentidos mais aguçados” (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.140). Partindo desse princípio, Francis Galton criou aparelhos para medir a capacidade sensorial dos indivíduos.

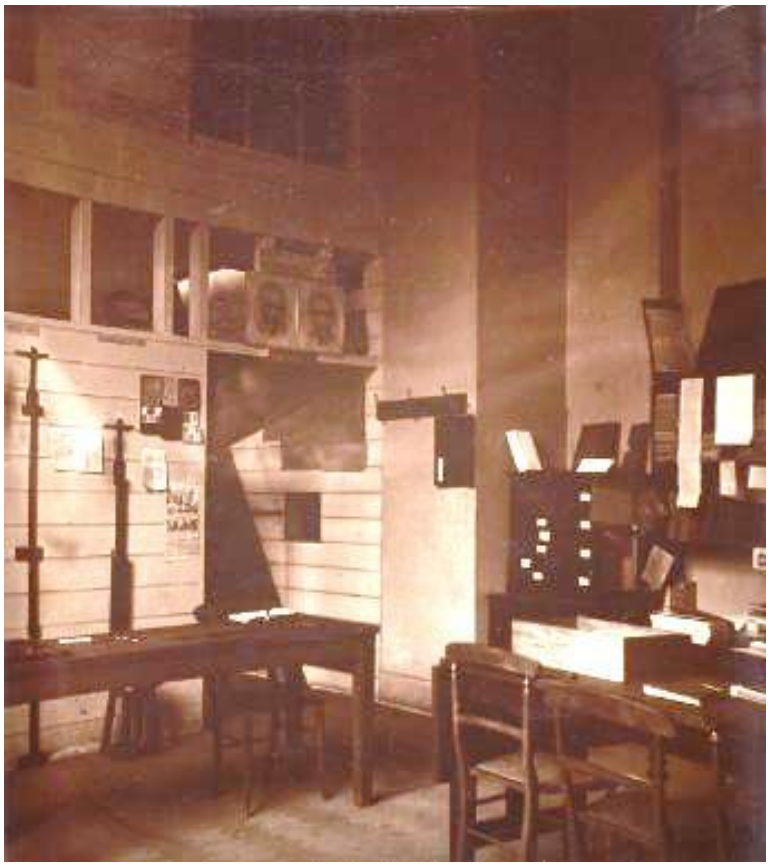
Assim,

> Para determinar a frequência sonora mais alta, passível de detecção, inventou um apito, que testou em animais e em seres humanos. Caminhava pelo zoológico de Londres com uma bengala que tinha o apito afixado em uma ponta e na outra uma espécie de bexiga de borracha que ele apertava para tocar o apito, enquanto observava as reações dos animais. O apito de Galton tornou-se uma peça-padrão entre os equipamentos do laboratório de psicologia até ser substituído, na década de 1930, por um dispositivo eletrônico mais sofisticado. Entre outros instrumentos usados por Galton estão o fotômetro, para medir a precisão com que uma pessoa consegue encontrar dois pontos da mesma cor, um pêndulo calibrado, para medir a velocidade da

> reação à luz e ao som, e uma série de pesos ordenados para medir a sinestesia ou a sensibilidade muscular. Criou ainda uma barra com várias medidas de distância para testar a estimativa de extensão visual e conjuntos de recipientes contendo diversas substâncias para testar a distinção olfativa. Em sua maioria, os testes de Galton serviram como protótipos para equipamentos que se tornaram padrão de laboratório. [...] Além dessas medidas mencionadas, os funcionários do laboratório registravam a altura, o peso, a capacidade respiratória, a força de impulsão e compressão, a rapidez de sopro, a audição, a visão e a percepção cromática. Cada pessoa passava por um total de 17 testes. (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.141)

Na figura a seguir, é possível ver a imagem do laboratório onde Galton fazia seus experimentos. O laboratório foi fundado em 1864, em Londres. Nele, Galton "arrumava os instrumentos para as medidas psicométricas e antropométricas sobre uma mesa comprida, no fundo de uma sala estreita, de mais ou menos 2m de largura por 11m de comprimento." (SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E., 2013, p.141).

Figura 4 – Laboratório Antropométrico de Galton



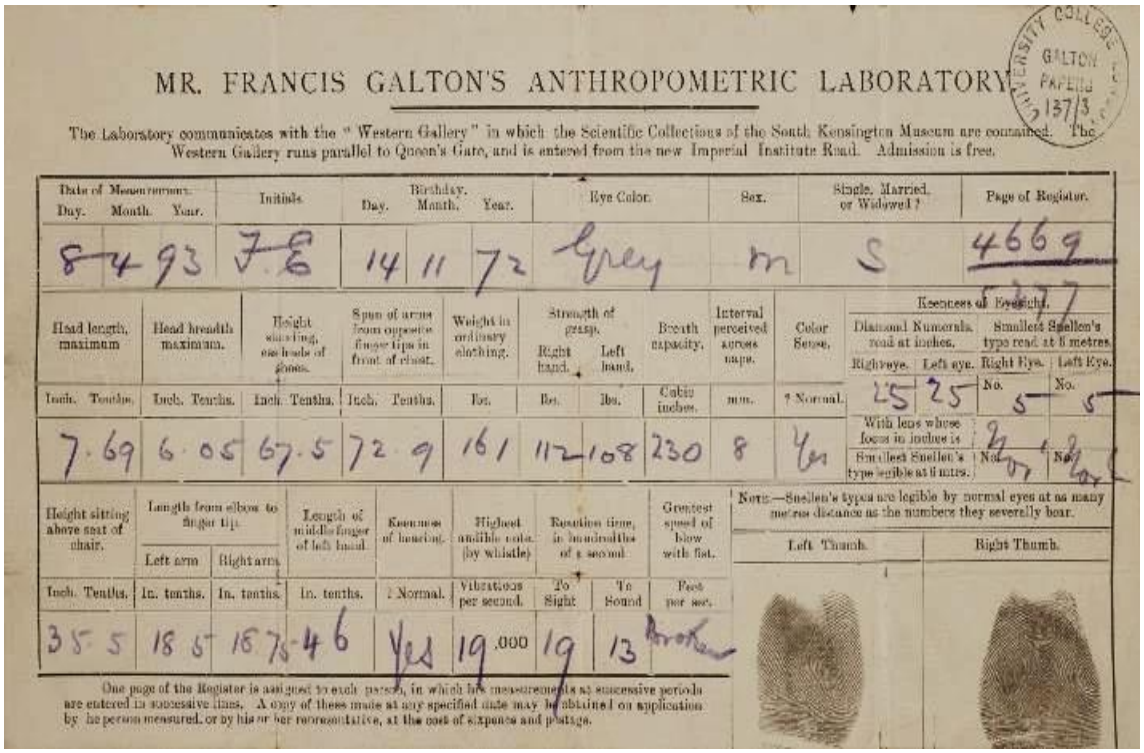
Fonte: UCL (s/d, s.p).

O visitante pagava três moedas de um centavo, se já possuísse cadastro ou, caso contrário, quatro moedas de um centavo que o daria direito a um registro e medidas

extras. Mediante pagamento, cada pessoa “entrava, passava por todo o comprimento da mesa e um atendente realizava a avaliação e registrava os dados em um cartão” (SCHULTZ, D. P.;SCHULTZ, S. E., 2013, p.141).

O cartão com o registro das medições de todos os pesquisados pode ser visto na figura a seguir.

Figura 5 – Cartão de registro do Laboratório antropométrica



MR. FRANCIS GALTON'S ANTHROPOMETRIC LABORATORY

The Laboratory communicates with the "Western Gallery" in which the Scientific Collections of the South Kensington Museum are contained. The Western Gallery runs parallel to Queen's Gate, and is entered from the new Imperial Institute Road. Admission is free.

Date of Measurement. Day.	Month.	Year.	Initials.	Birthday. Day.	Month.	Year.	Eye Color.	Sex.	Single, Married, or Widowed?	Page of Register.
8	4	93	F.G.	14	11	72	Grey	m	S	4669

Head length, maximum	Head breadth maximum.	Height sitting, ear holes of shoes.	Span of arms from opposite finger tips in front of chest.	Weight in ordinary clothing.	Strength of grasp. Right hand.	Left hand.	Breath capacity.	Interval perceived across nape.	Color Sense.	Keenness of Eyesight. Diamond Numerals read at inches. Right eye.	Left eye.	Smallest Snellen's type read at 6 metres. Right Eye.	Left Eye.
Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	lbs.	lbs.	lbs.	Cubic inches.	mm.	? Normal.	25	25	No. 5	No. 5
7.69	6.05	67.5	72.9	161	112	108	230	8	Yes	With lens whose focus in inches is			
										Smallest Snellen's type legible at 6 metres.		No. 07	No. 07

Height sitting above seat of chair.	Length from elbow to finger tip. Left arm	Right arm	Length of middle finger of left hand.	Keenness of hearing.	Highest audible note (by whistle)	Reaction time, in hundredths of a second. To Sight	To Sound	Greatest speed of blow with fist.
Inch. Tenths.	In. tenths.	In. tenths.	In. tenths.	? Normal.	Vibrations per second.			Feet per sec.
35.5	18.5	18.75	4.6	Yes	19,000	19	13	Brother

Note.—Snellen's types are legible by normal eyes at as many metres distance as the numbers they severally bear.

Left Thumb. Right Thumb.

One page of the Register is assigned to each person, in which his measurements at successive periods are entered in successive lines. A copy of these made at any specified date may be obtained on application by the person measured, or by his or her representative, at the cost of expense and postage.

Fonte: UCL (s/d, s/p).

Durante seis anos, Galton conseguiu 9000 registros familiares, muito deles completos, que levaram dez anos para serem analisados. Dentro dessas análises, a que ganhou mais destaque foi o estudo comparativo da estatura dos pais e seus respectivos filhos. Através desse estudo, Galton pode encontrar um método de estimar a altura que um filho teria, conhecendo apenas as alturas dos seus pais. Galton construiu um gráfico que relaciona essas alturas e, pela primeira vez, usou o termo regressão para denotar a regressão à média da população por ele observada.

> Galton se deu conta de que qualquer processo que não apresentasse a regressão à média iria acabar fora de controle. Por exemplo, suponha que os filhos de pais altos tivessem, em média, a mesma altura dos pais. Como as alturas variam, alguns filhos seriam mais altos. Agora imagine a geração seguinte e suponha que os filhos dos filhos mais

> altos, netos da geração original, também fossem, em média, tão altos quanto os pais. Dessa forma, com o passar das gerações, os seres humanos mais altos seriam cada vez mais altos. Devido à regressão à média, isso não acontece. (MLODINOW, 2009, p.173)

Você lembra o que significa média e como se calcula a média de um conjunto de valores? Volte à internet e faça novas pesquisas para responder as próximas questões. Não se esqueça de registrar tudo no caderno, com suas próprias palavras e discutir com a turma e seu professor acerca dos resultados encontrados por cada um.

5. Descreva algumas situações em que você já ouviu falar em média (ou em valor médio).

6. O que significa média?

7. Como se calcula a média aritmética de um conjunto de valores conhecidos? Cite um exemplo.

8. Do que você lembra quando ouve ou lê a palavra *regredir*?

9. O que significa regredir à média?

2º ENCONTRO:

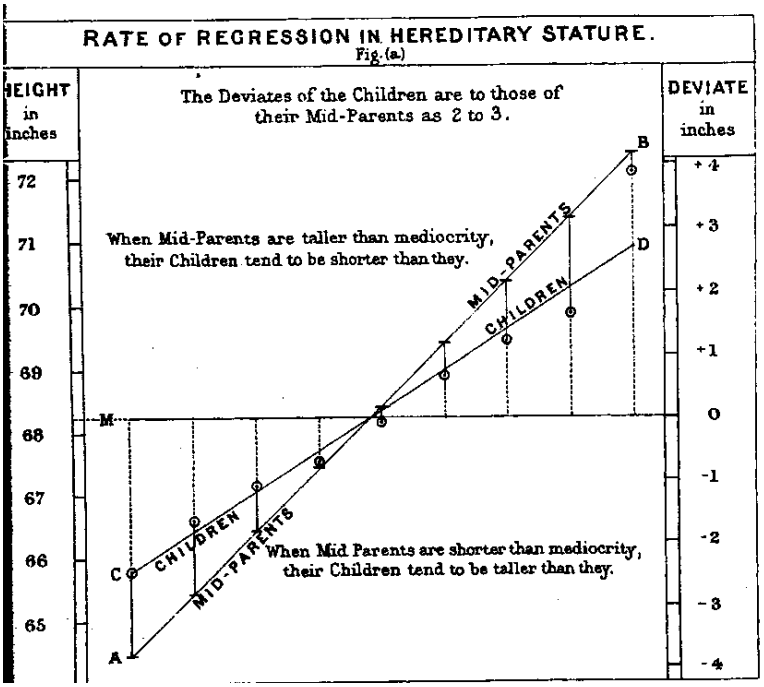
Os resultados de Francis Galton (1822-1911) e a recriação de seu experimento

No estudo das medidas das médias, Galton pode encontrar

> um método para prever as medidas dos filhos com base nas medidas dos pais. Um dos gráficos de Galton mostrava as alturas dos pais em relação às dos filhos. Se, digamos essas alturas fossem sempre iguais, o gráfico seria uma linha ordenada, elevando-se numa inclinação de 45°. Se essa relação se mantivesse na média, mas os dados individuais variassem, então o gráfico mostraria algumas medidas acima e abaixo dessa linha. Os gráficos de Galton portanto ilustravam visualmente não só a relação geral entre as alturas de pais e filhos, como também o quanto essa relação se mantinha constante. (MLODINOW, 2009, p.173)

Na Figura 6, o gráfico original construído por Galton para representar seu estudo sobre a estatura de pais e filhos pode ser visualizado.

Figura 6 – Linha de regressão construída por Galton ao observar a estatura de pais e filhos[4]



Fonte: Stigler (1986, p.295).

[4] Stigler (1986, p.295) comenta que a Figura é uma "ilustração gráfica de regressão do Galton; os círculos dão as alturas médias dos grupos de crianças cujas alturas das médias parentais podem ser lidas da linha AB. A diferença entre a linha CD (desenhada a olho para aproximar os círculos) e AB representa a regressão em direção à mediocridade".

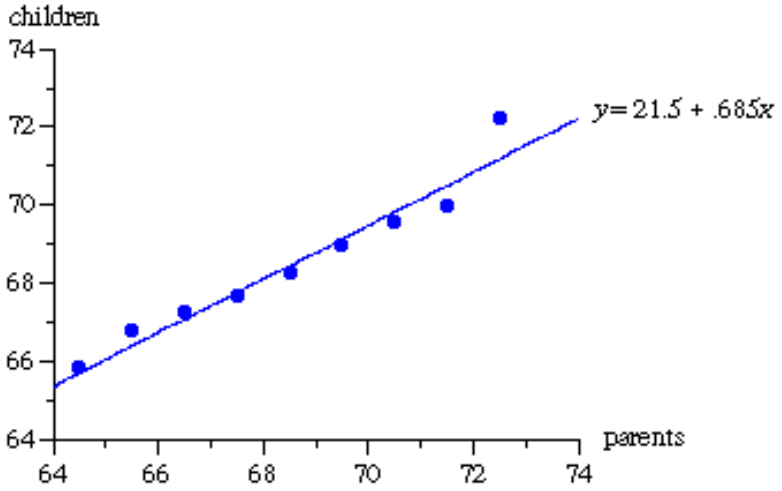
Os pontos representados por círculos indicam os valores das alturas dos filhos e podem ser lidos na linha CD. A linha AB, com traços, representa a altura dos pais. Há ainda, uma linha horizontal no centro do gráfico, indicando a média das alturas. No lado direito, os valores indicam os desvios, em polegadas. No lado esquerdo, têm-se as medidas das alturas, também em polegadas. No gráfico, pode-se perceber que quando os pais são mais altos do que a média, os filhos tendem a ser menores do que eles e quando os pais são mais baixos que a média, os filhos tendem a ser maiores do que eles (MEMÓRIA, 2004).

Acerca deste novo estudo, Smith (1997, s/p, tradução nossa) também comenta:

> Galton conseguiu registros familiares que continham as alturas de 205 pares de pais e seus 928 filhos adultos. Porque o homem médio é cerca de 8 por cento mais alto do que a média do sexo feminino, ele multiplicou as alturas do sexo feminino por 1,08 a torná-las comparáveis às alturas do sexo masculino. [...] A Figura 2 mostra que mais uma vez ele encontrou a regressão para a média.

A figura 2 referenciada na citação anterior encontra-se na Figura 7.

Figura 7 – Dados de Galton das alturas de pais e filhos



Fonte: Smith (1997, s/p.)

10. A Figura 6 consiste no gráfico original das alturas dos pais e filhos construído por Francis Galton, no século XIX, e a Figura 7 é uma nova e mais recente representação do gráfico de Galton. Compare as duas imagens e estabeleça as semelhanças e diferenças entre elas no que diz respeito aos pontos, eixos, retas, informações, etc. Registre suas observações na tabela a seguir:

	DIFERENÇAS	SEMELHANÇAS
Gráfico figura 6 (página 14)		
Gráfico figura 7 (página 15)		

11. Diante de toda a história pesquisada e discutida acerca da vida e obra de Francis Galton (1822-1911), propomos, agora, uma atividade que recrie o encontro histórico das medições familiares coletadas por Galton juntamente com a análise desses resultados de forma gráfica. Para tanto, você deverá medir, com o auxílio de uma balança e uma fita métrica, a sua altura (em metros) e a sua massa corporal (em quilos), bem como a altura e massa corporal do parente de geração anterior a sua (ver nota 4).

IDENTIFICAÇÃO	ALTURA (m)	MASSA (Kg)
VOCÊ		
PAI		
MÃE		
Outro parente responsável do sexo feminino* QUAL?		
Outro parente responsável do sexo masculino* QUAL?		

***Para o caso de você não morar com seus pais ou avós.**

Observação: não é necessário preencher a tabela inteira. Os dados mais relevantes para a pesquisa são os seus e de dois dos seus parentes de geração anterior à sua (um de cada sexo).[5]

[5] Para ser fiel ao experimento histórico é necessário coletar os dados do pai e da mãe. Contudo, caso não seja possível, poderá optar por apenas um dos seus parentes de geração anterior e mais próximo.

3° ENCONTRO:

A reunião dos dados e a representação no plano cartesiano – recriando o experimento.

Entregue sua tabela preenchida ao professor que irá reunir os dados de cada aluno e divulgá-los **(sem identificação)** à turma.

De posse de todos os dados, você deverá realizar as etapas descritas a seguir.

A partir deste momento, ao ler ao longo do texto a palavra **pais**, considere sempre **parentes**; ao ler **pai**, considere **parente masculino** e ao ler **mãe**, considere **parente feminino**.

12. Volte à Figura 7 e observe qual indivíduo (filho ou pai) está representado em cada eixo do gráfico e usando papel quadriculado, escolha uma das variáveis estudadas (altura ou massa) e represente cada par de dados (aluno e parente/parentes) no plano cartesiano. Lembre-se que Galton multiplicou a estatura da mãe por 1,08 e calculou a média aritmética da altura do pai e da mãe para representar a medida do parente de cada criança.

13. Após a representação de todos os pontos no plano, com uma régua, trace uma reta que se localize o mais próximo possível do conjunto de pontos traçados no gráfico.

14. **A partir da reta traçada**, faça um estudo investigativo da sua construção. Tente responder as seguintes questões, **justificando com suas próprias palavras:**

a) Existe uma relação de dependência entre os dois eixos do plano (horizontal e vertical)?

b) A variável do eixo x (horizontal) permite ter mais de um correspondente?

c) A variável do eixo y (vertical) permite ter mais de um correspondente?

d) Por que o gráfico traçado é de uma função?

e) A função pode ser afim?

f) A função pode ser quadrática?

g) A função pode ter o termo independente nulo (faça a projeção da reta traçada de modo que ela corte o eixo y)?

h) A função pode ter o termo independente negativo?

i) A função pode ter coeficiente angular negativo?

j) Qual a tangente do ângulo de inclinação dessa reta e o que isso representa na função?

k) Como é possível saber exatamente os valores dos coeficientes numéricos da função?

15. Após todas as respostas registradas, tente estimar a função que melhor representa a reta por você traçada. Analise os melhores valores para os coeficientes numéricos da função e o melhor expoente da variável x.

16. Após estimar a função, use-a para fazer estimativas, isto é, prever o valor de *y* sabendo o de *x* e vice-versa. Por exemplo, qual seria a altura do filho cujo pai mede 2 metros?

Registre todos os processos de construção do gráfico e da função, análises e conclusões em relatório parcial.

> Um relatório deve incluir uma descrição o mais detalhada possível do trabalho que realizou e pode ser organizado da seguinte forma:
> *Em primeiro lugar*, tente **descrever os passos** que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explica-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas, esquemas...
> *Em segundo lugar*, procure **resumir o que aprendeu** depois de realizar esse trabalho.
> *Finalmente*, é também importante que organize um **comentário geral em relação a tudo** o que fez. Pode, por exemplo, referir o interesse que a tarefa lhe despertou, quais os aspectos em que teve maior dificuldade e a forma como decorreu o trabalho no grupo. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.111, *grifo nosso*)

4° ENCONTRO:

O uso das planilhas eletrônicas para validação/comparação do modelo construído e aprofundamento do assunto

Será que o gráfico que você construiu manualmente e a função que você estimou estão mesmo corretos?

Agora você irá trabalhar em dupla no laboratório de informática da sua escola e refazer o gráfico que você e o seu colega construíram anteriormente, usando, agora, o computador.

Nesta atividade, nos limitaremos às ferramentas do *Excel*, versão 2010, contudo, os mesmos mecanismos estão disponíveis em outras versões e planilhas (como o *Calc*), alterando apenas o ícone ou a localização deste na barra de ferramentas do programa.

Passo 1: Primeiramente, se você e seu colega possuem gráficos de variáveis diferentes, escolha um deles para trabalhar.

Passo 2: Organize todos os pontos que estão no seu gráfico, distribuindo-os em uma tabela no *Excel*; na primeira coluna ficará os dados dos pais (ou parentes de geração anterior, dependendo de cada coleta) e, na segunda coluna, dos filhos (alunos). **Para separar as casas decimais use vírgula**! **Não importa a ordem** de inserção dos dados, mas cada variável *x* deve se corresponder a devida variável *y*, **formando o mesmo conjunto de pares ordenados** que um de vocês escolheu para fazer o gráfico manual.

Toda planilha eletrônica é composta de colunas dispostas por ordem alfabética e linhas numeradas. Assim, se queremos inserir um dado na primeira coluna e terceira linha, por exemplo, nos referimos a este local como sendo a célula A3.

Se vocês escolheram inserir as alturas dos pais e filhos, por exemplo, vocês devem digitar cada altura do pai e da mãe nas colunas A e B, respectivamente, e cada altura dos filhos na coluna D, pressionando a tecla *Enter* a cada dado inserido. Na coluna C ficarão as médias das alturas do pai e da mãe.

Observação: como já posto, o experimento das alturas de pais e filhos, realizado por Galton considerou a média das alturas dos pais, sendo a altura da mãe multiplicada por 1,08, assim, **somente se vocês escolheram essa variável** (altura de

pais e filhos) para construir o gráfico, devem inserir uma terceira coluna para calcular a média dos pais, **se a variável de vocês não é altura dos pais e dos filhos, estão já pode ir para o passo 3.**

Figura 8 – Exemplo de inserção de dados no *Excel*

	A	B	C	D
1	ALTURAS			
2	PAI	MÃE	MÉDIA	FILHO
3	180	150		167
4	210	162		170
5	179	172		174
6	172	169		180
7	172	169		174

Fonte: autoria própria, 2015.

Para calcular a média das alturas dos pais, na célula C3, primeira célula que irá receber a média das estaturas da primeira família, digite =(A3+(B3*1,08))/2 e pressione *Enter*.

Figura 9 – Inserindo a fórmula da média da estatura dos pais no *Excel*

	A	B	C	D
1	ALTURAS			
2	PAI	MÃE	MÉDIA	FILHO
3	180	150	=(A3+(B3*1,08))/2	
4	210	162		170
5	179	172		174
6	172	169		180
7	172	169		174

Fonte: autoria própria, 2015.

Para as demais células não será necessário repetir a fórmula. Volte na célula C3, clique no quadradinho escuro que aparece no canto inferior direito da célula e arraste até a linha da última família.

Figura 10 – Reproduzindo a fórmula para as demais células no *Excel*

	A	B	C	D
1	ALTURAS			
2	PAI	MÃE	MÉDIA	FILHO
3	180	150	171	167
4	210	162		170
5	179	172		174
6	172	169		180
7	172	169		174
8				

Fonte: autoria própria, 2015.

Passo 3: Construção do gráfico.

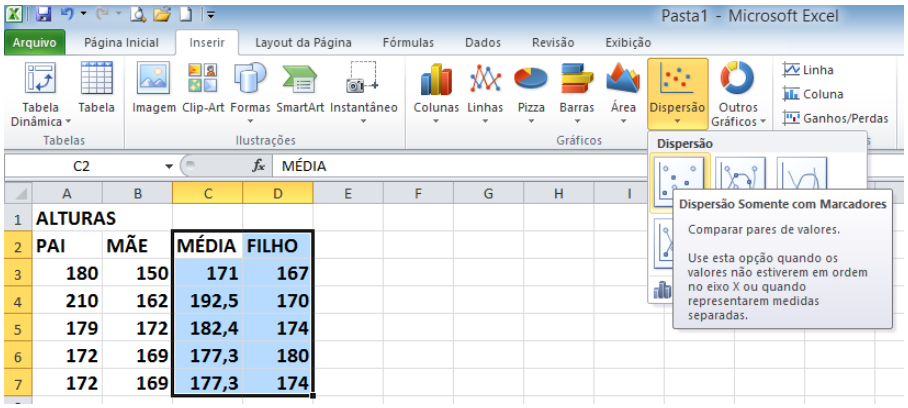
Antes de construírem o gráfico no *software*, pensem nas respostas das seguintes perguntas e registrem suas conclusões no caderno:

17. O que é dispersar?

18. Qual a relação entre o ato de dispersar-se e a construção inicial (do gráfico com o conjunto de pontos e a reta no plano cartesiano) realizada por vocês?

Gráficos de dispersão é a representação de um conjunto de n pontos (x_i, y_i) com $i = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ conhecidos no plano cartesiano. Permite visualizar o grau de associação e a relação funcional entre duas variáveis quantitativas (x e y). (BERTOLO, 2010). Para construir um gráfico de dispersão no *Excel* é necessário selecionar os dados das duas colunas de variáveis. No caso do exemplo dado anteriormente, selecionamos a coluna da média da estatura dos pais e a estatura dos filhos. Em seguida, no menu INSERIR, escolha a opção GRÁFICO DE DISPERSÃO.

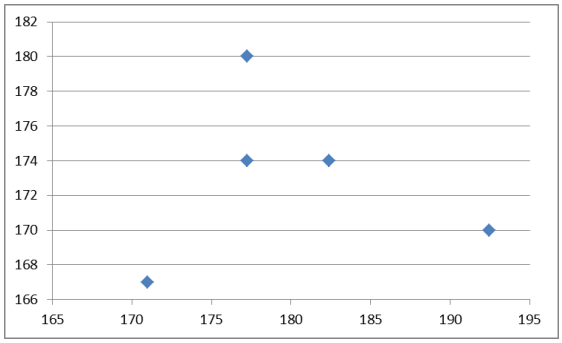
Figura 11 – Construindo o gráfico de dispersão no *Excel*



Fonte: autoria própria, 2015.

Clicando em cima e excluindo o título e a legenda do gráfico, veja como fica:

Figura 12 – Construindo o gráfico de dispersão no *Excel*



Fonte: autoria própria, 2015.

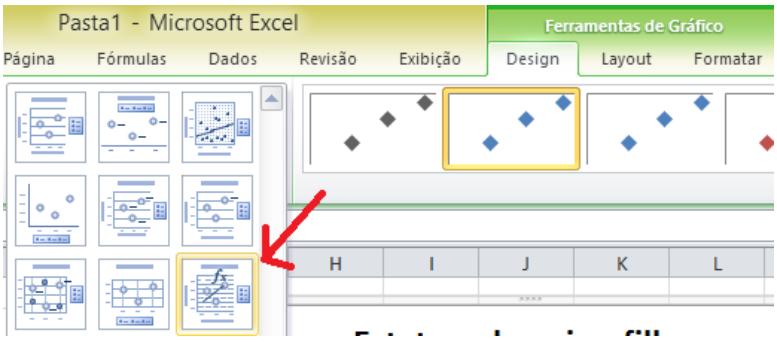
Se você deixar o cursor do mouse em cima de qualquer ponto, o programa mostrará a coordenada desse ponto.

Passo 4: Estimando a função que representa o gráfico.

Quando vocês traçaram, manualmente, a reta que representaria uma função nos seus gráficos, a reta não passava por todos os pontos, assim, a reta era um ajuste dos pontos (dispersos) e a função era uma estimativa.

O *software* de planilhas eletrônicas também faz este ajuste e estima a função. Para isso, cliquem no gráfico e automaticamente será ativada a barra de FERRAMENTAS DE GRÁFICO, bem como a opção DESIGNER, na parte superior do programa. Você deve escolher a opção de gráfico em que houver o desenho de uma reta e f_x sobre o gráfico (isso irá fazer com que apareça uma função, a reta e sua lei de formação, sobre o gráfico de dispersão construído. Observe que esta reta é a que melhor se ajusta aos pontos, passando pela maior quantidade deles).

Figura 13 – Ferramenta de ajuste de reta no *Excel*



Fonte: autoria própria, 2015.

Automaticamente, surgirá uma reta e a função que a representa, seguida do valor de R^2 que é o coeficiente de correlação[6] da função, mas que não iremos estudar nessa atividade. Vocês podem clicar na reta e, na janela que abrir, optar por não aparecer o valor do R^2.

Agora que vocês têm em mãos, tanto o gráfico construído manualmente quanto o construído do *software*, observem atentamente cada um deles, estabeleçam as semelhanças e diferenças entre a disposição dos pontos, a reta ajustada, a função encontrada, etc., respondendo as perguntas a seguir e registrando tudo no caderno:

[6]O coeficiente de correlação é geralmente denotado pela letra r e assume valores entre -1 e 1. Quando positivo indica que ao aumentarmos uma variável, a outra também aumenta. Se negativo, acontece o contrário, isto é, ao aumentar uma, a outra diminui. A correlação será perfeita quando r é igual a -1 ou 1, o que significa que todos os pontos observados estão na reta e, portanto, pertencem à função. (Fonte: http://www.monografias.com/trabajos96/analisis-regresion-y-correlacion/analisis-regresion-y-correlacion.shtml#ixzz3FO9fCGNK. Acesso em: 24 dez. 2014)

19. A função no *Excel* condiz com a reta ajustada pelo *software*? Por quê?

20. A reta ajustada pelo *software* tem semelhanças e/ou diferenças da construída por vocês? Quais?

21. A função estimada pelo *software* tem semelhanças e/ou diferenças da estimada por vocês? Quais?

22. De acordo com tudo o que foi estudado sobre a teoria eugênica de Galton e os experimentos realizados por vocês até agora, você conclui que Galton tinha razão ou não?

23. Na questão 16, vocês fizeram algumas previsões usando a função estimada manualmente. Use os mesmos dados para fazer as previsões, porém, com a nova função, encontrada pelo *software*.

Finalizem o relatório iniciado no segundo encontro da atividade e socializem suas análises e conclusões com sua turma e o seu professor.

EXPECTATIVAS DE RESPOSTAS DE CADA QUESTÃO:

Questão 1.

É esperado que o aluno faça uma pesquisa cuidadosa na internet, listando as principais características da Eugenia. No site da Infoescola (http://www.infoescola.com/genetica/eugenia/) há um texto de Débora Carvalho Meldau que afirma que a Eugenia foi criada por Galton, em 1883. De acordo com o texto, o matemático definiu esse termo como o estudo dos agentes sob o controle social que podem melhorar ou empobrecer as qualidades raciais das futuras gerações seja física ou mentalmente. Em outras palavras, trata-se de um **melhoramento** genético da população humana, incentivando a reprodução de casais com **boas** características e evitando ou eliminando aqueles com características degenerativas físicas e/ou mentais.

Questão 2.

Em um site institucional da Universidade de São Paulo (USP) (http://www.ib.usp.br/evosite/evo101/IIIENaturalSelection.shtml) podemos encontrar alguns exemplos que explicam o processo de seleção natural. A ideia básica é que seres vivos melhores adaptados tendem a ganhar espaço no meio ambiente, de forma natural. O site exemplifica com um conjunto de besouros verdes e marrons. Os besouros verdes tendem a ser comidos por pássaros. Logo, os besouros marrons se reproduzirão com mais frequência e em um período de tempo maior. Geneticamente, os besouros marrons tendem a gerar novos besouros, também marrons. Se esse processo continuar, eventualmente todos os indivíduos da população serão marrons. Portanto, tem-se uma evolução da espécie de besouros por seleção natural.

Na Eugenia, também se faz um processo de seleção dos indivíduos que irão se reproduzir com maior frequência e, assim, contribuir com uma sociedade de indivíduos de características comuns. Contudo, neste caso, tem-se uma seleção artificial, pois é realizada por humanos em humanos.

Questão 3.

Por ser uma ciência criada e estudada pelo homem, onde é o homem que decide quem têm **boas** e quem têm **más** características, este estudo traz bastante preconceito, racismo e descriminação. Numa sociedade que prega a igualdade para todos, é de

extrema importância que o aluno faça reflexões próprias nesta questão e esteja consciente de que este estudo não é aplicável.

Questão 4.

A Eugenia tem muito a ver com a Matemática, pois foi graças a este estudo que Francis Galton descobriu a Regressão Linear, conceito muito utilizado para análises e conclusões de pesquisas estatísticas em diversas áreas nos dias atuais. A Regressão Linear envolve gráficos de dispersão e funções que permitem estimar valores futuros. Todos estes conhecimentos são imprescindíveis na Matemática.

Questão 5.

O aluno poderá citar inúmeros exemplos. Com base em nossas experiências, prevemos que a maioria irá usar média escolar, como exemplo.

Questão 6.

Média pode ser definida como uma grandeza (medida) equidistante (à mesma distância) dos extremos de outras grandezas dentro de um conjunto. Existem vários tipos de cálculos para encontrar esta medida, dentre os quais, citamos a média aritmética, ponderada, geométrica e harmônica.

Questão 7.

A média aritmética é calculada somando-se todos os valores do conjunto e dividindo-se o resultado desta soma pela quantidade de valores somados. Digamos, por exemplo, que temos um conjunto de cinco idades: 14, 16, 16, 17, 18. A média aritmética deste conjunto será: (14 + 16 + 16 + 17 + 18)/5 = 16,2 anos.

Questão 8.

Com base em nossas experiências, a maioria dos alunos irá responder a esta questão usando a palavra **voltar.** De fato, ao ouvirmos ou lermos a palavra **regredir**, pensamos normalmente em voltar a algum ponto. Contudo, o aluno deve ficar atento que voltar a um ponto não implica obrigatoriamente em voltar de um ponto maior para um ponto menor (de 10 para 8, por exemplo). Pode-se, também, voltar de um ponto menor para um maior (de 7 para 11, por exemplo).

Questão 9.

Regredir à média é, como o próprio termo sugere, voltar à média. Imaginemos que um aluno sempre tire 80 pontos nas provas de Matemática. Isto significa que sua média é de 80 pontos. Porém, em um dia atípico ele tenha obtido 50 pontos de rendimento. Sua próxima nota tende a voltar a ser 80, se ele regredir à média. O mesmo aconteceria caso ele tenha obtido 100 pontos, ao invés de 50. No caso dos estudos de Galton, a regressão à média indica que "embora houvesse uma tendência de pais altos terem filhos altos e de pais baixos terem filhos baixo, a altura média dos filhos de pais de uma dada altura tendia a se deslocar ou regredir até a altura média da população. Em outras palavras, a altura dos filhos de pais extraordinariamente altos ou baixos tende a se mover para a altura média da população" (Fonte: <http://www.cps.fgv.br/cps/pesquisas/Politicas_sociais_alunos/2010/BES_raiz_aanew/pdf/BES_%20Regress%C3%A3oLinear.pdf> Acesso em: 07 dez. 2015)

Questão 10.

	DIFERENÇAS	SEMELHANÇAS
Gráfico figura 6 (página 14)	Há dois eixos paralelos, indicando variáveis distintas (altura à esquerda e desvio à direita).	Em ambos os gráficos temos dados das alturas dos pais e seus respectivos filhos. Em ambos os gráficos há uma reta de ajuste ao conjunto de pontos conhecidos. Alguns desses pontos ficam fora da reta traçada (não pertencem ao gráfico).
	Há um reta indicando a média.	
	Há um gráfico (uma reta) para as alturas dos pais e um para o dos filhos.	
	Nenhum dos eixos se cruzam	
	Alguns pontos/traços não pertencem às respectivas retas.	
Gráfico figura 7 (página 15)	Os eixos se cruzam.	
	Ambos os eixos indicam alturas, mas em um indica a altura do pai e o outro do filho.	
	Há um único gráfico (reta) que indica a altura dos pais e filhos, ao mesmo tempo.	
	Não há uma reta que indica média.	
	Não há informação dos desvios.	

Questão 11.

Pessoal.

Questão 12.

Pessoal.

Questão 13.

Pessoal.

Questão 14.

a) O eixo *x* (variável correspondente aos pais) é sempre independente do eixo *y* (variável correspondente aos filhos dos respectivos pais). Por este motivo, lê-se *f(x)* como *"f em função de x"*.

b) Se o estudante observar apenas o gráfico de dispersão ou a tabela construída com os valores coletados, deverá encontrar um ou vários exemplos em que se tem dois ou mais filhos com mesma altura, mas se correspondendo a pais de alturas distintas. Ou o inverso também pode ser encontrado. Mas no caso desta questão 14, enfatizamos que a investigação deve ser a partir da reta traçada. Como a reta tem uma inclinação, então ela não corresponde a uma função constante, mas sim uma função afim. Toda função afim é, por consequência, uma função bijetora, já que cada valor de *x* se corresponde a um único valor de *y*. Logo, a variável do eixo *x* não permite mais de um correspondente.

c) Assim como explicado no item anterior, como temos uma reta inclinada que corresponde a uma função afim, estabelecendo uma relação bijetora, então o eixo *y* não permite mais de um correspondente.

d) O gráfico traçado é considerado uma função pela sua relação de dependência do y em função do *x*.

e) A função é afim pelo gráfico traçado ser uma reta inclinada.

f) A função não pode ser quadrada, pois o ajuste foi feito traçando uma reta inclinada que corresponde apenas a uma função afim.

g) O aluno deverá projetar a reta de ajuste até "cortar" o eixo *y* e verificar se a reta passa ou não pela origem.

h) Do mesmo modo que o item anterior, a projeção da reta até o eixo *y* irá determinar se a reta passa ou não por um número negativo.

i) O aluno deverá observar se a reta traçada é crescente ou decrescente. Caso ela seja crescente, então o coeficiente angular será positivo. Caso a reta seja decrescente, então o coeficiente será negativo.

j) Para obter o ângulo de inclinação, o aluno pode medir com o transferidor e depois calcular a tangente pela calculadora. Contudo, como o gráfico possivelmente não estará proporcional, não resultará no mesmo valor que o encontrado pela fórmula da tangente de um ângulo (cateto oposto dividido pelo cateto adjacente do triângulo retângulo formado com dois pontos distintos do gráfico). Portanto, a tangente do ângulo será melhor obtida através do uso da fórmula. O valor encontrado da tangente do ângulo representa o valor do coeficiente angular da função afim.

k) Um dos modos de saber os coeficientes angular e linear da função afim é usando os próprios conceitos desses valores. O coeficiente linear é obtido através da tangente do ângulo de inclinação da reta, isto é, traça-se um triângulo retângulo com dois pontos distintos pertencentes a reta e divide-se o valor do cateto oposto pelo valor do cateto adjacente deste triângulo. O coeficiente linear é encontrado apenas observando em que ponto no eixo **y** a reta passa. Outro modo de descobrir os mesmos valores é por meio de um sistema de duas equações lineares. Cada equação é obtida, substituindo x e y da equação $y = ax + b$ pelas coordenadas de um ponto pertencente a reta traçada no gráfico.

Questão 15.

Nos itens anteriores, o aluno descobriu o valor dos coeficientes linear e angular da função de ajuste. Assim, basta substituir estes valores (coeficiente angular no a e coeficiente linear no b) na equação $y = ax + b$.

Questão 16.

Para fazer estimativas com a função de ajuste, basta substituir o *x* por qualquer valor referente aos pais (variável independente) e resolver a equação. Assim, se encontra o valor de *y* (variável dependente).

Questão 17.

De acordo com o dicionário, dispersar é espalhar-se, desconcentrar-se, ir para diferentes partes.

Questão 18.

A construção inicial do gráfico, foi dispondo os pontos (x, y) no plano cartesiano (onde x eram as medidas dos parentes e y a medida dos filhos). Como os pontos eram de pessoas aleatórias, não formaram uma sequência padrão, mas ficaram dispersos/espalhados no plano cartesiano.

Questão 19.

O aluno deverá observar o valor no eixo *y* onde a reta passa, no gráfico, e se este valor é igual ao coeficiente linear (*b*) da função de ajuste. Também é preciso calcular a tangente do ângulo inclinação através de dois pontos conhecidos, pertencentes à reta, que formam um triangulo retângulo (dividindo o cateto oposto pelo cateto adjacente deste triângulo). O resultado encontrado deverá ser igual ao coeficiente angular (*a*) da função de ajuste. Por fim, se a reta for crescente, o coeficiente angular deverá ser positivo. Caso contrário, o coeficiente angular deverá ser negativo.

Questão 20.

Embora as respostas desta questão variem, uma vez que tem como base o gráfico construído por cada grupo, todos devem comparar as construções (manuais e pelo software) atentando-se ao crescimento/decrescimento da reta; a inclinação e o valor no eixo y onde as retas passam.

Questão 21.

Embora as respostas desta questão variem, uma vez que tem como base o gráfico construído por cada grupo, todos devem comparar as construções (manuais e pelo software) atentando-se aos valores e sinais dos coeficientes linear e angular da função.

Questão 22.

Pessoal.

Questão 23.

Para fazer estimativas com a função de ajuste, basta substituir o x por qualquer valor referente aos pais (variável independente) e resolver a equação. Assim, se encontra o valor de y (variável dependente).

DICAS PARA O PROFESSOR:

Este caderno é uma atividade histórica que, segundo Miguel et al. (2009, p.107), "são atividades que utilizam a história para o ensino da Matemática".

Antes de iniciar a aplicação deste caderno é necessário que o professor faça uma aula expositiva sobre funções afins, gráficos, plano cartesiano, coeficientes angular e linear, termos e variáveis dependentes e independentes. Estes conhecimentos subsidiarão o processo investigativo nas respostas dos alunos às questões propostas.

Conhecimentos sobre triângulo retângulo, razões trigonométricas (especificadamente a tangente) e ângulos também serão úteis para as respostas.

No primeiro encontro:

O professor pode entregar aos alunos o roteiro da atividade aos poucos, lendo com toda a turma o texto sobre a história de Galton e seus experimentos e disponibilizar um tempo para pesquisa na internet, quando houver perguntas, antes de passar para a próxima leitura.

É importante que o docente deixe claro o objetivo do projeto em estudar a matemática envolvida na história de Galton e da Regressão Linear, e não a discussão acerca das intenções de Galton com as ideias eugênicas. O professor pode provocar uma reflexão com a turma afim de conscientizá-los que esta prática não é aceita na sociedade atual e que se trata de uma ideia preconceituosa e racista, mas que trouxe avanços para a matemática.

Também é oportuno que o professor oriente a turma de como fazer uma pesquisa eficiente usando a internet. Usar sites governamentais ou de instituições públicas; priorizar artigos que possuam o nome do autor e evitar informações de blogs e de sites de perguntas e respostas anônimas são algumas dicas que podem ser utilizadas.

Nas questões 6 e 7:

A definição de média normalmente é confundida com a definição de média aritmética. É importante que o professor esteja atento às respostas dos alunos nestas questões, que podem gerar um conflito cognitivo quando o aluno responder equivocadamente que média é a soma de todos os valores dividida pelo total de termos e, na sequência, ao pedir que este mesmo aluno defina média aritmética, ele usar a mesma resposta.

No segundo encontro:

Como neste momento a leitura ficará um pouco mais técnica, envolvendo interpretação de gráficos, recomendamos que a turma seja dividida em pequenos grupos e que cada grupo faça a leitura entre si.

Para a coleta dos primeiros dados, o professor pode levar uma balança e fita métrica para coletar os dados dos alunos. Caso eles não tenham essas ferramentas em casa para coletar os dados dos seus parentes, uma sugestão possível é pedir que registrem os dados aproximados que as pessoas conhecem de seu próprio peso e altura.

Na questão 9:

Como regredir significa voltar, os alunos podem concluir equivocadamente que regredir à média é sair de um número maior e voltar à média que, para o aluno, pode ser compreendido como um número menor. O professor deve identificar esses erros e levar ao aluno a pensar que a volta pode ocorrer de modos distintos (de um número menor que a média até a média ou de um número maior à média).

Início do terceiro encontro:

Após os alunos coletarem os dados e trazerem os resultados para a continuação da atividade, o professor deve reunir e divulgar todos os dados a turma. Para tanto, pode ser feito de várias formas, dentre elas:

- Criar uma tabela em um *software* de planilhas eletrônicas e projetar com o auxílio de um projetor multimídia.
- Criar uma tabela em um *software* de planilhas eletrônicas e distribuir cópias impressas para cada aluno.
- Pedir que os alunos coloquem na parede da sala de aula a sua tabela preenchida e, desse modo, cada aluno escolhe uma das variáveis e registra os valores em seu próprio caderno.

É de extrema importância que o professor tenha cuidado em não identificar nenhum aluno ou parente nos dados divulgados, evitando, assim, possíveis constrangimentos.

Na questão 14:

Os alunos deverão ter um tempo para responder às questões que se pede. Após todos responderem, é importante que sejam discutidas algumas respostas na sala de aula. Diante do que os alunos falarem, o professor deve lembrar a turma da definição de função e diferenciá-la do conceito de relação. Para isso, pode pegar como exemplo um gráfico de algum aluno que tenha dois valores distintos em um eixo se correspondendo com um único valor no outro eixo e, a partir desse exemplo, perguntar se estes dois pares ordenados podem pertencer, ao mesmo tempo, à reta traçada. Esse processo também será útil para esclarecer o que consiste uma relação biunívoca e poderá definir o conceito de função bijetora.

Nas letras ***g*** e ***h***, os alunos podem confundir termo independente (coeficiente linear b da função afim) com variável independente (variável x da função). O professor deve acompanhar as respostas dos alunos e chamar a atenção para estes equívocos.

Na letra ***j*** os alunos deverão usar transferidor para medir o ângulo de inclinação e perceber que a tangente deste ângulo resulta no valor do coeficiente angular da função afim.

Na letra ***k***, os alunos poderão encontrar os coeficientes linear e angular da função por meio de um sistema de duas equações lineares, conhecendo dois pontos do gráfico. Outro modo é sabendo onde a reta *corta* o eixo *y*, que será o valor de *b* (coeficiente linear), e calculando a tangente do ângulo formado, que será o valor de *a* (coeficiente angular).

No quarto encontro, ao calcular a média das alturas dos parentes no *Excel*:

O professor poderá explorar os conceitos de prioridades de operações para estimular os alunos a pensar no porquê do uso dos parênteses na fórmula. O aluno poderá testar a retirada de alguns parênteses e verificar o que acontece com o novo resultado. Assim, o professor poderá fazer perguntas aos alunos, tais como: *É o mesmo resultado que o anterior? Por quê?*

No mesmo cálculo para a média, também é realizada a multiplicação da altura das mulheres por 1,08, pois, na época, Galton sabia que os homens eram cerca de 8% mais altos que as mulheres. A partir disso, é interessante que o professor possa perguntar aos alunos a relação de 1,08 com 8% e o porquê de multiplicar pela altura ao invés de somar. Além disso, pode encaminhar uma pesquisa para ver se esta taxa permanece atualmente ou se deveria ser substituída por outra.

A análise do comportamento da média ao longo da mudança dos dados também é demasiadamente significativa. O aluno poderá observar o que acontece quando um dos valores permanece e o outro reduz (a média também reduz?) ou aumenta (a média também aumenta?), por exemplo. Isso poderá ser facilmente realizado apenas modificando os valores das colunas das alturas, *no software*, e verificando o novo resultado para a média.

Na questão 19:

Os alunos que escolheram como variável de estudo a massa corporal, terão valores relativamente altos e por mais que estabeleçam uma proporção entre eles ao inserir no plano cartesiano, provavelmente não irão se atentar na proporção da medida entre a origem e o primeiro valor. Estes gráficos manuais, sem a devida proporção, provavelmente irão ser mostrados de forma diferente no *software*, alterado principalmente o sinal do coeficiente angular da função estimada.

Haverá casos, também, que a função estimada pelo *software* não irá condizer com a reta ajustada (como o valor do coeficiente angular ser diferente do valor onde a reta *corta* o eixo *y*, por exemplo). Este fato se dá por algumas funções somente serem válidas para o intervalo de dados coletados, sem garantia de crescimento linear fora desse intervalo conhecido. Nestes casos, o conjunto de pontos traçados se ajusta melhor a uma curva e, assim, necessita de um ajuste não linear, isto é, usando funções exponenciais, logarítmicas ou outras que não seja a Função Afim. O professor deve julgar esse fato de forma extremamente positiva, levando o aluno a *duvidar da máquina* (uma vez que o estudante tende sempre a achar que a máquina está certa) e fazer com que o aluno reflita e busque alternativas que justifique o problema encontrado.

Na questão 23:

O professor pode orientar os alunos que modifiquem alguns valores na tabela e observem o que vai acontecendo com o comportamento do gráfico (a reta) e os coeficientes da função. Dependendo dos valores modificados, a reta pode *se transformar* de crescente para decrescente (ou vice versa) e os coeficientes da função, de positivo para negativo (ou vice versa).

Outras dicas:

É recomendado que o professor não entregue ao aluno todo o caderno de atividade de uma única vez, no primeiro encontro. Sugerimos que as atividades sejam realizadas e entregues aos poucos. Propositalmente, este caderno possui a transição de um encontro para outro sempre em páginas distintas e o texto que contempla a resposta de algum conjunto de questões também se localiza na página posterior às perguntas realizadas. Isso se deu devido a provocação de um estímulo ao ato investigativo do aluno antes da apresentação da informação. Além disso, há a possibilidade do docente poder imprimir todo o caderno, mas conforme o avanço dos alunos, entregar a próxima etapa da atividade separadamente.

É possível que nas atividades de pesquisa os alunos copiem o texto tal qual encontrarem na internet, sem compreender o que estão transcrevendo para o caderno. Para que se garanta a aprendizagem, é importante que o professor peça que os alunos pesquisem, mas que respondam com suas próprias palavras de forma breve. Além disso, é útil que o professor possa retomar estas respostas de forma oral, envolvendo todos os alunos, para verificar se eles realmente entenderam a resposta que escreveram.

Pode acontecer de um aluno ser adotado e não conhecer nenhum parente biológico, assim, na coleta de dados da altura e massa dos seus parentes, o aluno pode fazer os registros de um vizinho ou amigo e seus respectivos parentes.

É recomendado que o professor entregue a folha de expectativas de respostas ao final de toda a atividade para o aluno poder comparar com suas próprias respostas.

REFERÊNCIAS

ARQUITETURA da destruição. Diretor e roterista: Peter Coen. Suécia: Filmes da Mostra, 1992. (121 min.), color.

CONT, V. D. Francis Galton: eugenia e hereditariedade. **Scientiae studia**, São Paulo, v.6, n.2, p.201-18, 2008. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ss/v6n2/04.pdf> Acesso em: 31 out. 2014.

ENGELS, F. **A situação da classe trabalhadora na Inglaterra segundo observações do autor e fonte autênticas**. Tradução: B. A. Schumann. São Paulo: Boitempo, 2008.

GOULD, S. J. Três aspectos da evolução. In: BROCKMAN, J.; MATSON, Katinka. (Org.). **As coisas são assim**. São Paulo: Cia das Letras, 1997. p. 95-100.

HOBSBAWM, E. J. **A era das revoluções**: Europa 1789-1848. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1994.

MEMÓRIA, J. M. P. **Breve História da Estatística**. Brasília: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. Disponível em: <www.im.ufrj.br/~lpbraga/prob1/historia_estatistica.pdf> Acesso em: 10 out. 2014.

MIGUEL, A.; et al**. História da Matemática em Atividades Matemáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

PEARSON, K. **The Life, Letters and Labours of Francis Galton**. Vol. 2. Cambridge: University Press, 1924.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SALSBURG, D. **Uma senhora toma chá**: como a estatística revolucionou a ciência no século XX. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

SCHULTZ, D. P.; SCHULTZ, S. E. **História da Psicologia Moderna**: tradução da 9ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SMITH, G. **Do Statistics Test Scores Regress Toward the Mean?**, Claremont, CA: Pomona College, 1997, 42–45. Disponível em: < http://economics-files.pomona.edu/GarySmith/StatsRegress/StatsRegress.html> Acesso em 02 nov. 2014

STEPAN, N. L. **The hour of eugenics: race, gender, and nation in Latin América**. Ithaca/London: Cornell University Press, 1991.

STIGLER, S. M. **The history of statistics**: the measurement of uncertainty before 1900. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986.

APÊNDICE E

ATIVIDADE HISTÓRICA 2

Nível de ensino para realização:

1ª série do Ensino Médio

Assuntos abordados nessa atividade:

- Variável dependente e independente;
- Noções de intervalo;
- Noções de conjunto;
- Domínio e Imagem de uma função;
- Função injetora, sobrejetora e bijetora;
- Função afim e seus coeficientes;
- Plano cartesiano;
- Gráfico de uma função afim;
- Zero da função;
- Pares ordenados.

Conhecimentos prévios:

O que foi estudado na atividade 1.

Organização:

Atividade em grupo de 3 ou 4 alunos.

Recursos necessários:

- Lápis;
- Papel A4;
- Computador com um *software* de planilha eletrônica (Excel ou outro);
- Internet;
- Fita métrica;
- Balança;
- Projetor multimídia;
- Caixa de som.

Tempo de realização:

4 encontros (cada encontro representa um dia contendo três aulas, cada uma com duração de 45 minutos).

Objetivos da atividade:

- Compreender que os conhecimentos matemáticos (funções afim) e estatísticos (coleta e tratamento de dados, construção e interpretação de tabelas e gráficos) estão

presentes no nosso cotidiano e surgem normalmente de uma necessidade da sociedade;

- Diferenciar função de relação;
- Identificar o tipo de função (injetora, sobrejetora e bijetora) com base na análise dos dados coletados;
- Identificar o domínio, contradomínio e imagem da função com base na análise dos dados coletados;
- Usar um *software* de planilhas eletrônicas para criar um gráfico de dispersão[1] e encontrar a função que melhor representa este gráfico;
- Fazer previsões usando a função com o recurso tecnológico.

Cronograma:

Encontro:	Atividade realizada:	Local da atividade:	Páginas usadas:
1º encontro	Pesquisa de como o experimento de Galton ainda está presente nos dias atuais; Formação dos grupos e escolha das novas variáveis (medidas do corpo humano e tamanho de roupas, calçados e acessórios) a estudar/trabalhar; Coleta de dados das variáveis escolhidas.	Sala de aula com projeção e som	De 3 a 4
2º encontro	Análise dos dados coletados.	Sala de aula	De 5 a 6.
3º encontro	Representação dos dados em um gráfico de dispersão com recurso tecnológico; Estimativa da função; Previsões com a função estimada.	Laboratório de informática	De 7 a 9.
4º encontro	Entrega de relatórios; Socialização e discussão dos resultados obtidos de cada grupo.	Sala de aula com projeção	

Avaliação:

Além da avaliação continuada, levando em consideração a participação ativa, assiduidade e autonomia de cada aluno, atividades e relatórios escritos também complementarão a avaliação da aprendizagem de cada estudante.

[1]Trata-se da representação de um conjunto de pontos (x_i, y_i) conhecidos no plano cartesiano. (BERTOLO, 2010).

1º ENCONTRO:

O inglês Francis Galton (1822-1911) se inspirou na *seleção natural* do seu primo, Charles Darwin (1809-1882), para criar a *seleção artificial*. Galton cunhou a palavra *Eugenia* que significava um novo campo de estudos que tinha como objetivo selecionar casais com *boas* características, estimulando sua procriação, bem como evitar que pessoas com características degenerativas se reproduzissem.

Apesar do estudo polêmico e preconceituoso, foi através de tentativas de provar sua teoria que Galton descobriu as impressões digitais, criou a Regressão Linear e contribuiu em larga escala para a Matemática e a Estatística.

Você sabia que experimentos similares ao de Galton existem hoje com finalidades parecidas e que seu método é usado para resolver problemas atuais como o tamanho das roupas que cada um de nós vestimos?

Acesse os links *http://globotv.globo.com/rede-globo/jornal-hoje/v/pesquisadores-mapeiam-medidas-do-corpo-dos-brasileiros/3744433/*[2] e *http://g1.globo.com/minas-gerais/triangulo-mineiro/noticia/2012/08/censo-antropometrico-estara-em-uberlandia-mg-nesta-quarta-feira.html*[3] para compreender melhor.

Observação: caso os links não estejam mais disponíveis, pesquise na internet acerca dos estudos antropométricos no Brasil.

Questão 1. Quais medidas do corpo humano são importantes nos dias atuais para produção de roupas, calçados e acessórios? Forme um grupo com mais 2 ou 3 colegas da sua turma, escolham uma variável/medida importante do corpo humano (como circunferência da cintura, da cabeça ou do busto, por exemplo) para ser medida e colete essas medidas do corpo, bem como uma outra variável/medida da roupa/calçado/acessório que cada aluno da sua turma usa. Registre os dados no papel para posterior análise.

---

[2]Trata-se de uma reportagem do Jornal Hoje, da TV Globo, de 5 de novembro de 2014, cuja manchete é "Pesquisadores mapeiam medidas do corpo dos brasileiros".

[3]Refere-se a uma reportagem do G1, site de notícias da internet, datada de 21 de agosto de 2012, cujo título é "Censo antropométrico estará em Uberlândia, MG, nesta quarta-feira".

Questão 2. Após a coleta de dados, vocês terão dois conjuntos de valores que se referem a duas variáveis distintas (parte do corpo humano e roupa). Faça uma tabela em um papel ou diretamente em um *software de planilhas eletrônicas* a fim de organizá-los.

2º ENCONTRO:

Analisando essa tabela...

a) Existe uma relação de dependência entre as variáveis? Observem se uma variável depende da outra e, em caso positivo, quem é a variável dependente e quem é a variável independente de seus estudos? Caso não, justifique.

b) Vejam na tabela qual o menor e qual o maior valor do conjunto de cada variável.

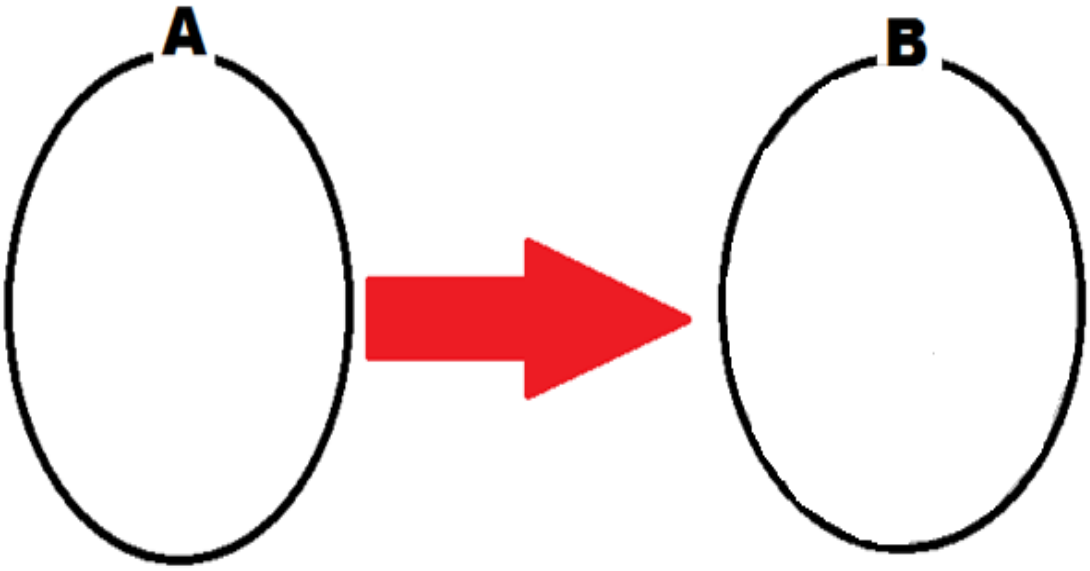
Cada um desses dois valores (o menor e maior) representa o limite mínimo e máximo de valores que a variável assume, de acordo com os dados que sua turma coletou.

Por exemplo, se na coleta das alturas dos alunos da turma a maior altura registrada foi 2,3m e a menor foi 1,55m, então as alturas h da pesquisa estão entre 2,3m e 1,55m, ou seja, $1{,}55 \leq h \leq 2{,}3$. Diante do exposto, identifique os limites máximos e mínimos das duas variáveis estudadas por seu grupo.

Qual o intervalo de medidas que pertence a cada variável?

Você sabia que na Matemática existe um nome específico para cada um desses intervalos?

c) Observe a figura abaixo:



Nesta figura, estão sendo representados dois conjuntos, *A* e *B*, onde os valores de *B* dependem de *A* (A está gerando/implicando em B). Com base nas reflexões e respostas dos itens anteriores, qual das variáveis que vocês estão estudando representa o conjunto *A*? Qual representa o conjunto *B*?

d) Existe alguma medida pertencente ao conjunto *A* que se corresponda, ao mesmo tempo, com dois ou mais outros valores pertencentes ao conjunto *B*?

e) Existe alguma medida pertencente ao conjunto *B* que se corresponda, ao mesmo tempo, com dois ou mais outros valores pertencentes ao conjunto *A*? Pode existir? Citem um exemplo, em caso positivo. Em caso negativo, justifique.

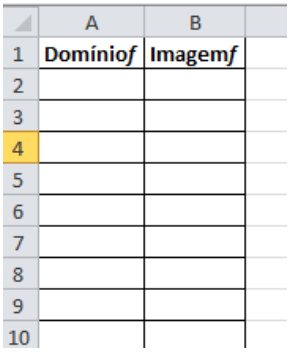
f) Existe alguma medida/valor pertencente ao conjunto *A* que não tenha correspondente em *B*? Pode existir?

g) Existe alguma medida/valor pertencente ao conjunto *B* que não tenha correspondente em *A*? Pode existir? Citem um exemplo, em caso positivo. Em caso negativo, justifique.

3º ENCONTRO:

Agora vocês vão retornar ao laboratório de informática. No mesmo grupo, transfiram os dados que haviam coletado na sala e registrado na sua tabela para uma planilha eletrônica (*Excel* ou *Calc*). Insira na primeira coluna apenas os elementos pertencentes ao domínio (as variáveis independentes pertencentes ao primeiro conjunto/medidas do corpo), e na segunda coluna, os elementos da imagem (as variáveis independentes pertencentes ao segundo conjunto/medidas da roupa ou acessório). Veja na imagem 1 abaixo como isso pode ser organizado:

Figura 1 – Exemplo de inserção de dados no *Excel*

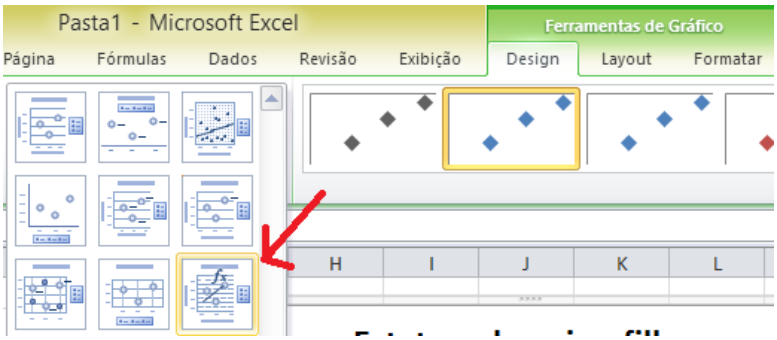


Fonte: autoria própria, 2015.

Selecione os dados das duas colunas de variáveis. No menu INSERIR, escolha a opção GRÁFICO DE DISPERSÃO.

Ao surgir o gráfico, clique sobre ele e automaticamente será ativada a barra de FERRAMENTAS DE GRÁFICO, bem como a opção DESIGNER, na parte superior do programa. Você deve escolher a opção de gráfico em que houver o desenho de uma reta e f_x sobre o gráfico.

Figura 2 – Ferramenta de ajuste de reta no *Excel*



Fonte: autoria própria, 2015.

Isso irá fazer com que apareça uma função, a reta e sua lei de formação, sobre o gráfico de dispersão construído. Observe que esta reta é a que melhor se ajusta aos pontos, passando pela maior quantidade deles.

A partir da análise do gráfico e da função construída no *software*, reflitam sobre as questões a seguir:

Questão 3. Escreva a função encontrada e verifique se ela é crescente ou decrescente, justificando a sua resposta.

Questão 4. É possível prever outros valores para a variável y conhecendo a medida/valor de x? Em caso positivo, como? Em caso negativo, justifique.

Questão 5. Que valor x se tem quando $y = 0$? Este valor é chamado de ***zero da função***, você sabe por que ele tem esse nome?

Questão 6. Que valor y se tem quando $x = 0$?

Questão 7. Qual o valor do termo independente (também chamado de coeficiente linear) da função encontrada? Compare com o valor encontrado na questão anterior.

Questão 8. A reta ajustada aos pontos, exibida pelo *software*, passa pelo ponto (0, 0) do plano cartesiano? Em caso positivo, por quê? Em caso negativo, essa reta pode passar por esse ponto? Por quê?

Questão 9. Se você tivesse apenas a função e fosse desenhar o gráfico que a representa em um papel, que pontos mais importantes você teria que conhecer/usar?

Questão 10. De acordo com seus cálculos para encontrar o zero da função na questão 5, por qual valor no eixo x (linha horizontal do plano cartesiano) a reta que representa sua função deve passar no gráfico? É o que acontece no *Excel*? Se não, é o que deveria acontecer?

Questão 11. De acordo com seus cálculos para encontrar o termo independente da função nas questões 6 e 7, por qual valor no eixo y (linha vertical do plano cartesiano) a

reta que representa sua função deve passar no gráfico? É o que acontece no *Excel*? Se não, é o que deveria acontecer?

Questão 12. Após responder as questões anteriores, organizem suas ideias sobre funções afins e seus gráficos, relembrando suas características, comportamentos, etc. e façam um novo relatório, relembrando que:

> Um relatório deve incluir uma descrição, mais detalhada possível, do trabalho que realizou e pode ser organizado da seguinte forma:
> *Em primeiro lugar*, tente **descrever os passos** que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explica-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas, esquemas...
> *Em segundo lugar*, procure **resumir o que aprendeu** depois de realizar esse trabalho.
> *Finalmente*, é também importante que organize um **comentário geral** em relação a tudo o que fez. Pode, por exemplo, referir o interesse que a tarefa lhe despertou, quais os aspectos em que teve maior dificuldade e a forma como decorreu o trabalho no grupo. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.111, grifo nosso)

EXPECTATIVAS DE RESPOSTAS DE CADA QUESTÃO:

Questão 1.

Pessoal.

Questão 2.

a) Existe uma relação de dependência entre as variáveis. A variável y (tamanho da roupa/acessório) depende da variável x (medida do corpo). Assim, a variável y é dependente e a variável x é independente, isto é, o tamanho da roupa/acessório dependente da medida do corpo humano.

b) Menor valor da coluna $x \leq x$ (medida do corpo) $\leq$ Maior valor da coluna x; Menor valor da coluna $y \leq y$ (medida da roupa/acessório) $\leq$ Maior valor da coluna y.

Os nomes específicos para estes intervalos são Domínio e Imagem. O Domínio são todos os valores pertencentes ao conjunto x (variável independente, que no caso deste estudo, são as medidas do corpo). A Imagem são todos os valores pertencentes ao conjunto y (variável dependente de x, que no caso deste estudo, são os tamanhos de roupas e acessórios) que se correspondem com um valor em x.

c) O conjunto A é representado por todos os valores de x, isto é, as variáveis independentes. Este conjunto é denominado de Domínio da função. No caso deste estudo, o conjunto A será composto por todas as medidas de corpo humano coletadas.

O conjunto B é representado por todos os valores de y, isto é, as variáveis dependentes de x. Este conjunto é denominado de Contra-domínio da função. Apenas o subconjunto de variáveis independentes que possuem correspondentes em x é que denotamos de Imagem. No caso deste estudo, apenas os tamanhos das roupas/acessórios farão parte deste conjunto e subconjunto.

d) É possível que os alunos, ao coletarem os dados, encontrem dois alunos com a mesma medida de busto, por exemplo, mas que vistam camisas de tamanhos distintos. Uma explicação para este fato é a preferência de cada pessoa. Alguns vestem roupas de tamanho maior do que necessitam, pois preferem tamanhos maiores para se sentirem

mais confortáveis. Outra explicação é a inexistência de um padrão definido por todas as fábricas de roupas. Os moldes podem variar de fábrica para fábrica.

Desconsiderando estes casos atípicos, cada medida de corpo só se corresponde a um único tamanho de roupa/acessório.

Dessa forma, cada variável x ϵ A só se corresponde com um único $y \epsilon B$.

e) Podem existir casos em que, por exemplo, duas ou mais pessoas com tamanhos de bustos distintos vistam o mesmo tamanho de camisa. Dessa forma, poderemos ter duas variáveis distintas em A, $x' \epsilon A$ e $x'' \epsilon A$ que se correspondam com um mesmo $y \epsilon B$. Essas duas correspondências formarão os pares ordenados (x', y) e (x'', y).

f) O conjunto A refere-se à medida do corpo. Logo, sempre irá existir um correspondente de tamanho de roupa para uma medida do corpo.

g) Pode acontecer do conjunto de pessoas entrevistadas não vestirem camisas de tamanho GG, por exemplo. Dessa forma, haverá um tamanho no conjunto B que não terá correspondente no conjunto A.

Questão 3.

O aluno deverá observar o sinal do coeficiente angular (a) da função. Se ele for positivo, então a função é crescente. Caso contrário, a função é decrescente.

Questão 4.

É possível fazer estimativas com a função de ajuste. Para isso, basta substituir o x por qualquer valor referente aos pais (variável independente) e resolver a equação. Assim, se encontra o valor de y (variável dependente).

Questão 5.

Ao substituir o y por zero na função ajustada pelo software e resolver a equação, o aluno encontrará o zero da função. Ele tem esse nome porque é o valor que anula a função.

Questão 6.

Basta substituir o *x* por zero e resolver a equação. Assim, se encontra o valor de *y* (variável dependente). Este valor também é o mesmo do eixo *y*, no plano cartesiano, onde a reta passa. Também se refere ao coeficiente linear (*b*) na função afim.

Questão 7.

O aluno deverá observar a função ajustada pelo software e verificar se o número que represente o termo independente (ou coeficiente linear) é o mesmo encontrado na questão anterior. Obrigatoriamente, deverá ser o mesmo.

Questão 8.

A reta somente passará pela origem, isto é, pelo ponto (0, 0) se, quando o *x* assumir valor nulo, o *y* também ser nulo. Em outras palavras, o valor nulo se corresponderá apenas com outro valor nulo. No caso do nosso estudo, significa dizer que quando a medida do corpo for 0 unidades então esta medida se corresponderá a um tamanho de roupa ou acessório de 0 unidades. Isso faz todo o sentido. Porém, a função ajustada pelo software não permite essa correspondência, pois o ajuste é para um conjunto de pontos (dados coletados) não nulos, conhecidos. Assim, embora seja possível a reta passar pela origem, a função ajustada não permite tal acontecimento. Uma maneira matemática de provar isto é substituindo o *x* da função por zero e analisando se *y* também resultará em zero, ao resolver a equação.

Questão 9.

Os pontos mais importantes para traçar uma reta no plano cartesiano, que corresponde a uma função afim, é conhecer os pontos no eixo *x* e no eixo *y* onde a reta irá passar. Ou seja, conhecer o zero da função (valor de *x* que anula *y*) e o coeficiente linear (o valor de *b* da função, onde a reta irá passar no eixo *y*).

Questão 10.

O cálculo que o estudante fizer para encontrar o zero da função (substituindo, na função, *y* por zero e resolvendo a equação) deverá ser o mesmo valor onde a reta passará no eixo *x*. Caso não seja, a função de ajuste do *software* não condiz com o gráfico construído.

Questão 11.

O cálculo que o estudante fizer para encontrar o coeficiente linear (substituindo, na função, x por zero e resolvendo a equação) deverá ser o mesmo valor do coeficiente linear da função e também onde a reta passará no eixo y. Caso não seja, a função de ajuste do *software* não condiz com o gráfico construído.

Questão 12.

Pessoal.

DICAS PARA O PROFESSOR:

Esta atividade poderá ser feita isolada e independente da primeira.

O professor pode dar sugestões de medidas que os alunos coletarão. Dentre elas, podem estar inclusas:

- Medida do comprimento do quadril e o número da calça que veste;
- Comprimento do pé e o número do calçado que cada aluno calça;
- Comprimento da circunferência da cabeça e o diâmetro do chapéu/boné;
- Comprimento da circunferência do dedo e o diâmetro ou número do anel[4];
- Comprimento do busto e o número da blusa que veste;
- Massa corporal e altura de cada indivíduo[5].

Pode ocorrer de um grupo usar as medidas das roupas em letras (*P*, *M*, *G*) ao invés de números. É importante que se faça a conversão dessas medidas para número, pois, caso contrário, não será possível estabelecer uma função para as relações encontradas. Dessa forma, deve ser solicitado que estes grupos pesquisem na internet quais números correspondem a cada tamanho de roupa. Nestas pesquisas eles também pode descobrir o motivo de um determinado número corresponder a uma determinada letra (PP é equivalente a uma blusa 36, por exemplo).

Outra abordagem bastante significativa e proveitosa poderá ser feita pelo professor, se este permitir que os alunos descubram por si sós por que não podem usar as letras para fazer parte do conjunto imagem da sua função. Dentro desse pensamento, podem-se diferenciar variáveis quantitativas de qualitativas e estabelecer a importância de cada uma delas.

Os alunos não precisarão coletar os dados de toda a turma, podendo o professor estabelecer um número mínimo de pessoas que devem fazer parte da coleta. Nesse momento, o docente poderá falar brevemente sobre população e amostra. Diferenciar os dois conceitos e pedir aos alunos que façam uma amostragem.

---

[4]Em revistas de moda e venda de perfumes e acessórios, existem imagens de aros e anéis com o seu respectivo número de referência. Em sites como o *http://www.reisman.com.br/medidas.htm* existem tabelas com as medidas de cada anel.

[5]Como não existe uma relação proporcional entre a massa e altura de um indivíduo, talvez a análise dessas medidas estabeleça uma confusão mental entre o grupo que a escolher. No entanto, pode ser uma alternativa para o professor trabalhar um contraexemplo ou um exemplo que foge do padrão de estudo dos demais grupos.

Item *a* do primeiro encontro:

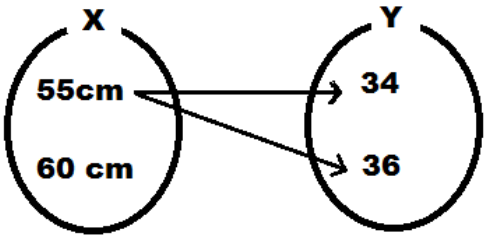
O professor pode discutir com cada grupo qual variável precisa de uma informação adicional para poder existir. O grupo que escolher medir o comprimento da cintura e registrar o número da calça que cada aluno veste, por exemplo, deve perceber que, para cada medida de comprimento da cintura é que se tem um número de calça. Não se confecciona uma calça sem ter como base o comprimento da cintura do indivíduo. Desse modo, o comprimento da cintura da pessoa (que não depende de nenhuma outra medida, dentre as estudadas) é a variável independente, que pertencerá ao conjunto A ou X, denominado de Domínio. Já o número da calça, que depende da medida do comprimento da cintura da pessoa, é a variável independente, visto que a cada medida de cintura se tem uma correspondência única com um número de calça (correspondência biunívoca). Assim, estes valores pertencerão ao conjunto B ou Y, referente à Imagem da função *f(x)*.

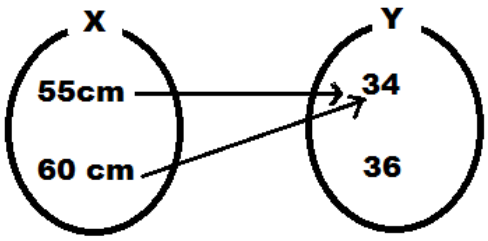
Item *b* do primeiro encontro:

O professor pode optar por deixar os alunos fazerem uma pesquisa rápida na internet ou em livros didáticos (pedir que acessem a internet do celular ou que busquem um livro na biblioteca) sobre o que é domínio e imagem e pedir que eles nomeiem cada intervalo que identificaram com um desses conceitos.

Itens *d* e *e* do primeiro encontro:

No caso do grupo que ficar com a medida do comprimento da cintura e o número de calça que cada aluno veste, os alunos deverão perceber que não se pode ter uma mesma medida de cintura que vista dois números distintos de calça (não considerando os casos de fábricas que usam padrões diferentes). Por outro lado, pode haver duas pessoas de medidas de cintura distintas que vistam o mesmo número de calça. Essas duas citações podem ser representadas no diagrama abaixo para melhor compreensão:





No primeiro diagrama (à esquerda), tem-se um exemplo de relação, mas que não é uma função[6], pois um elemento em *X* está se correspondendo com mais de um elemento em *Y*. Já no segundo caso (à direita), a relação é uma função, mesmo com um elemento em *Y* sem correspondente e mesmo com dois elementos distintos em *X* estarem se correspondendo com o mesmo elemento de *Y*.

Além de reforçar a diferença entre relação e função, o professor aqui pode deixar claro a definição de função e formar o conceito de função sobrejetora [7](quando dois ou mais elementos distintos em *X* se correspondem com um único elemento em *Y* e todos os elementos de X se correspondem), bem como de função injetora e bijetora com os outros itens que seguem.

Itens *f* e *g* do primeiro encontro:

Ainda exemplificando com a medida do comprimento da cintura e o número da calça que cada indivíduo veste, qualquer cintura sempre terá um número de calça correspondente (visto que todos os alunos usam calças), não existindo, portanto, um elemento em *X* que não tenha correspondente em *Y*. Por outro lado, pode existir uma calça significativamente pequena ou significativamente grande que não caiba em nenhum indivíduo, dessa forma, podem existir elementos em *Y* sem correspondentes em *X* (deve ficar claro para os alunos que mesmo havendo elementos em *Y* sem correspondentes, ainda assim a relação é uma função).

Esse exemplo é uma situação clara de função injetora (com elementos em *Y* sem correspondentes).

[6]Lembramos que para uma relação *f* de A em B ser uma função, por definição matemática, qualquer *x* pertencente ao conjunto A tem apenas um único correspondente y pertencente ao conjunto B.

[7]Outro exemplo que pode ser abordado pelo professor para formar o conceito de função sobrejetora é o caso de dois indivíduos que tem a mesma altura (elementos da Imagem), com massa corporal distinta (elementos do Domínio).

SUGESTÃO DE QUESTÕES PARA AVALIAÇÃO

Questão 1. Abaixo, temos uma tabela com medidas do busto de oito alunos e seus respectivos tamanhos de camisas que vestem. Use todos os pares ordenados para construir um gráfico de dispersão. Nomeie os eixos x e y de acordo com os nomes das variáveis envolvidas.

Busto (cm)	70	55	61	59	60	55	70	70
Camisa (Tam)	47	44	46	45	46	44	47	47

Questão 2. Abaixo, se encontram três gráficos de dispersão distintos que tratam de antropometria (medidas corporais). As variáveis envolvidas em cada gráfico podem ser lidas em seus respectivos eixos.

Gráfico I:

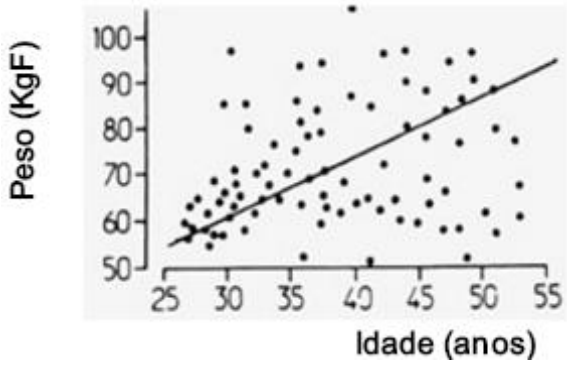


Gráfico II:

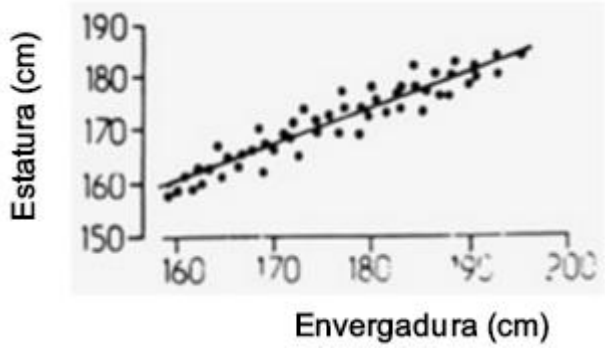
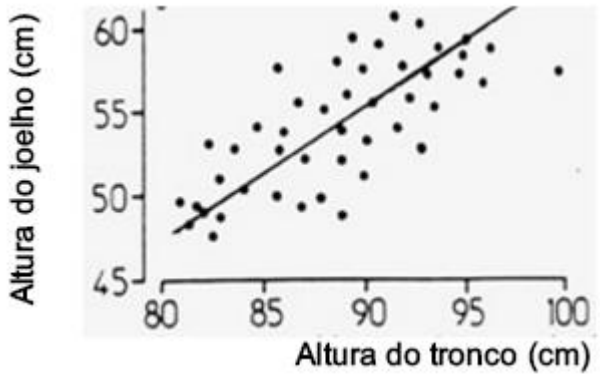


Gráfico III:



Julgue cada item a seguir em verdadeiro (V) ou falso (F), com base nos gráficos anteriores.

i. ( ) O gráfico 1, por ter pontos mais dispersos, é considerado uma correlação forte entre as variáveis.

ii. ( ) O gráfico 2, por ter mais pontos pertencentes a reta de ajuste, é considerado uma correlação forte.

iii. ( ) O gráfico 3 possui uma correlação média.

iv. ( ) O gráfico 2 possui uma correlação nula, não estabelecendo nenhuma relação entre as variáveis envolvidas.

Questão 3. Os três gráficos de dispersão abaixo mostram correlações negativas entre as variáveis. Indique qual dos gráficos possui uma correlação perfeita e justifique sua escolha.

Gráfico 1

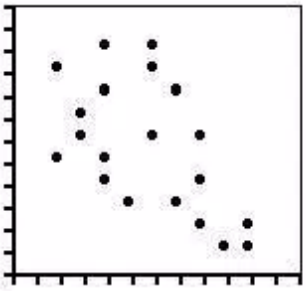


Gráfico 2

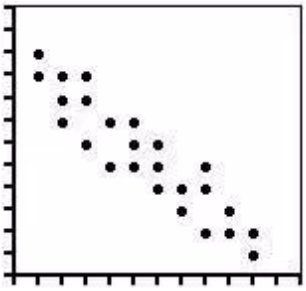
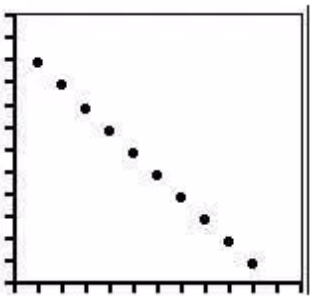


Gráfico 3



Questão 4. P, M, G, XG são letras usadas para diferenciar tamanhos de roupas. Elas são classificadas, na Estatística, como variáveis qualitativas, isto é, exprimem qualidade de tamanho. Como podemos transformá-las em variáveis quantitativas e assim poder melhor estudá-las matematicamente?

Questão 5. Abaixo, temos uma tabela com medidas do busto de oito alunos e seus respectivos tamanhos de camisas que vestem.

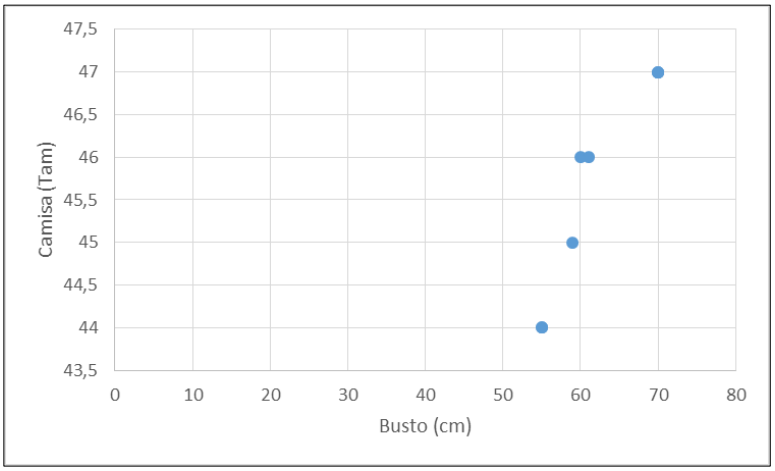
Busto (cm)	70	55	61	59	60	55	70	70
Camisa (Tam)	47	44	46	45	46	44	47	47

a) Represente esta tabela em um diagrama de dois conjuntos distintos se correspondendo. O primeiro conjunto será o Domínio e o segundo, o Contradomínio.

b) Esta representação, feita no item anterior, pode ser um exemplo de função? Em caso positivo, poderia ser uma função injetora, sobrejetora ou bijetora? Positiva ou negativa? Em caso de não poder ser uma função, justifique.

GABARITO DA SUGESTÃO DE QUESTÕES PARA AVALIAÇÃO

Questão 1.



Questão 2.

i. Falso
ii. Verdadeiro
iii. Verdadeiro
iv. Falso

Questão 3.

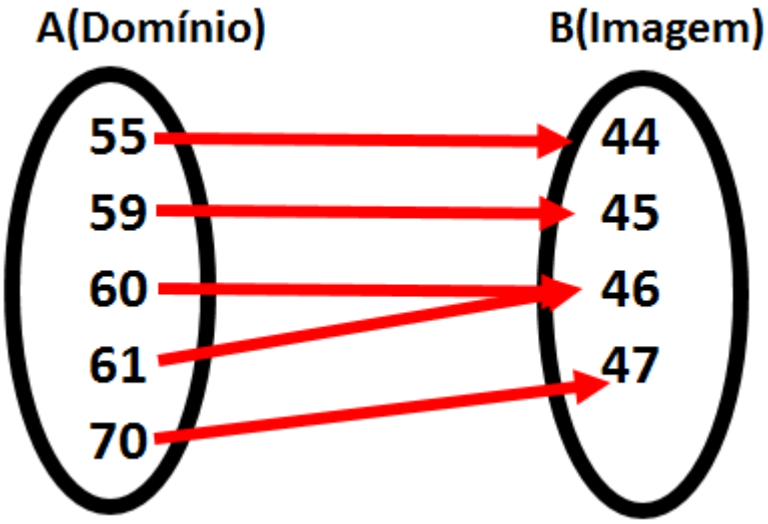
O gráfico 3 possui uma correlação perfeita entre as variáveis, visto que todos os pontos são ajustáveis de modo a pertencer à reta de ajuste. Isso significa que nenhum ponto ficará fora da reta de ajuste.

Questão 4.

Para transformar em variáveis quantitativas, basta transformar cada letra em um número correspondente àquele tamanho.

Questão 5.

a)



c) Como todos os elementos no domínio se correspondem a um único elemento no contradomínio, então a relação representada no diagrama é uma função.

A medida que o tamanho do busto aumenta, o tamanho da camisa também aumenta, portanto, trata-se de uma função crescente, ou seja, positiva.

Todos os elementos no contradomínio estão se correspondendo, isto é, o contradomínio é igual à imagem da função. Contudo, há dois elementos distintos em A que se correspondem a um mesmo elemento em B. Dessa forma, a função é sobrejetora.

REFERÊNCIAS

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

APÊNDICE F

ATIVIDADE AVALIATIVA INDIVIDUAL FINAL

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Natal - Central

DISCIPLINA: **Matemática** PROFESSORA: **Juliana Schivani**

NÍVEL: 1° ano do Téc. Int. em Edificações

ALUNO(a): _____

Data: **27/08/2015.**

1. O saldo de uma conta corrente pode ser um valor positivo ou negativo. Quando negativo, significa que o cliente está devendo uma determinada quantia para o banco. O saldo bancário de Cloviana Carmonisa é, hoje, R$100,00 positivos. Ela pretende depositar mensalmente, a partir do próximo mês, R$50,00.

a) Qual a função que representa o saldo da conta de Cloviana em função da quantidade x de depósitos?

b) Calcule a raiz (ou zero) dessa função.

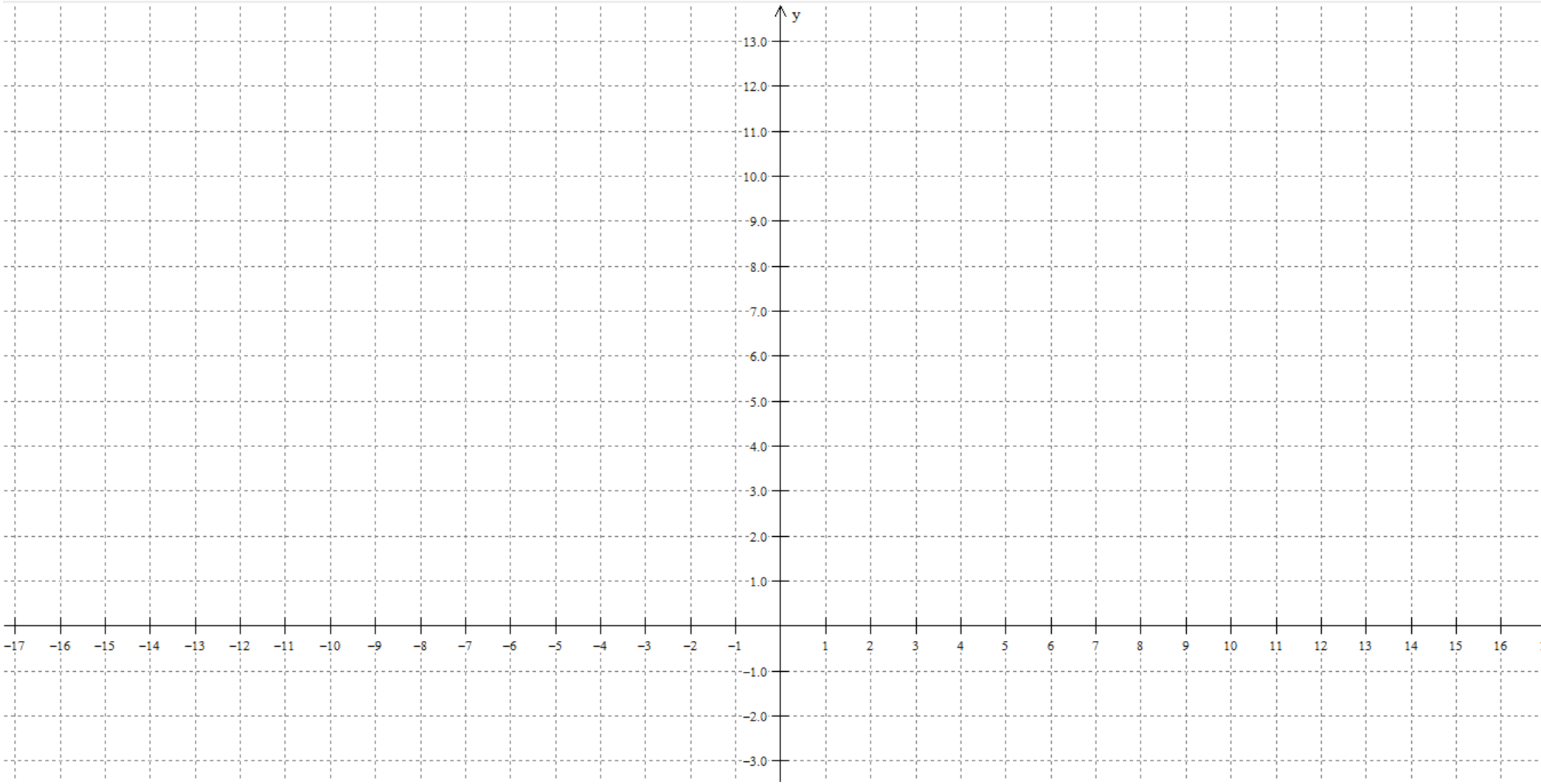
c) O que significa o valor desta raiz (ou zero da função) para Cloviana?

d) Construa o gráfico desta função (na próxima página, onde se tem o plano cartesiano traçado) de modo que a reta corte os dois eixos do plano cartesiano.

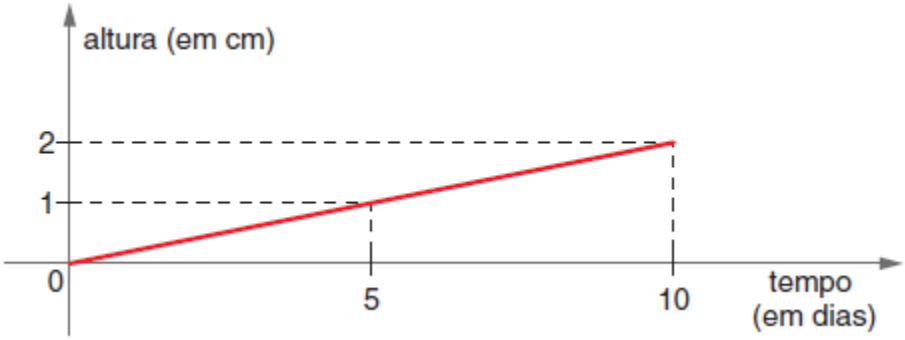
e) A reta traçada é crescente ou decrescente?

f) A partir de quantos depósitos a função se torna positiva? O que significa, para Cloviana, a função ser positiva?

g) A partir de quantos depósitos a função se torna negativa? O que significa, para Cloviana, a função ser negativa?


y
13.0
12.0
11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
−1.0
−2.0
−3.0
−17 −16 −15 −14 −13 −12 −11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

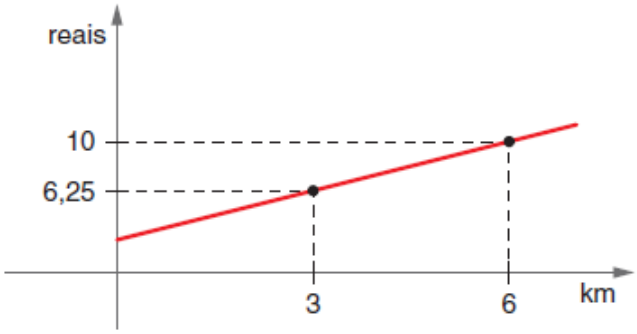
2. Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.



Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá, no trigésimo dia, uma altura igual a:

a) 5
b) 150
c) 15
d) 30
e) 6

3. Na figura, é indicado o preço pago por uma corrida de táxi, em função da distância percorrida.



Nessas condições, o valor a ser pago num trajeto de 5 km é, em reais:

a) 8,00
b) 8,13
c) 8,50
d) 8,75
e) 9,00

4. Um terreno vale hoje R$ 40 000,00 e estima-se que daqui a 4 anos seu valor seja de R$ 42 000,00. Admitindo que o valor do imóvel seja função polinomial do 1º grau do tempo (medido em anos e com valor zero na data de hoje), seu valor daqui a 6 anos e 4 meses será aproximadamente de:

a) R$ 43 066,00.

b) R$ 43 166,00.

c) R$ 43 266,00.

d) R$ 43 366,00.

e) R$ 43 466,00.

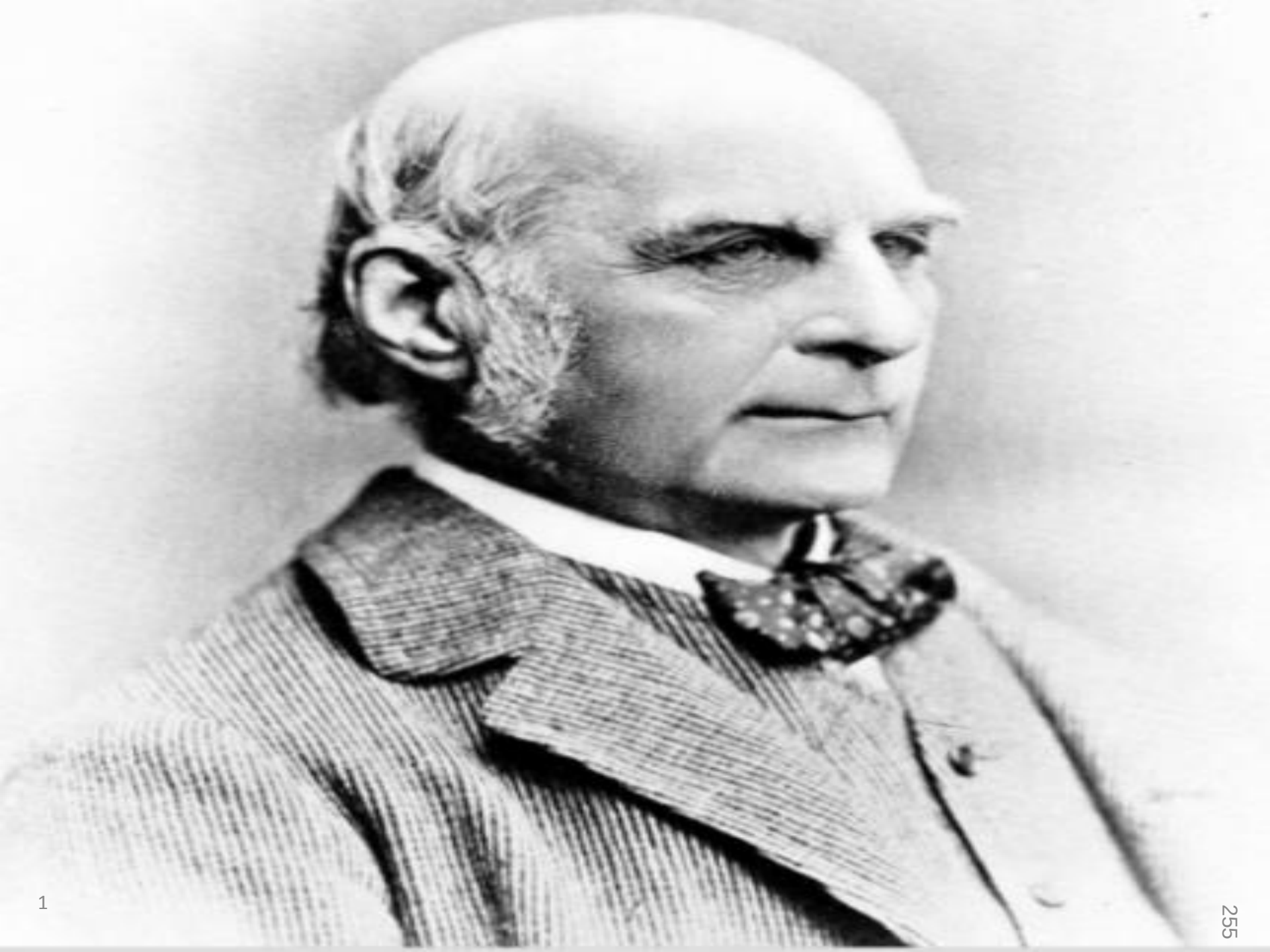
5. Explique com suas próprias palavras o que é uma função afim.

6. Por que o **zero da função** tem esse nome?

"Tentar não significa conseguir,
mas todos que conseguiram, um dia tentaram."

APÊNDICE G

SLIDES DE SOCIALIZAÇÃO



1. O que é Eugenia e quais são seus objetivos?

- ✓ Características físicas;
- ✓ Características mentais;
- ✓ Melhoria da espécie humana;
- ✓ Procriação de casais selecionados.

1. O que é Eugenia e quais são seus objetivos?

Eugenia - substantivo feminino bio
teoria que busca produzir uma seleção nas
coletividades humanas, baseada em leis
genéticas; eugenismo.

2. Em que consiste o estudo da seleção natural de Charles Darwin e o que ele tem a ver com a Eugenia?

- ✓ NÃO humanos;
- ✓ Adaptação dos ANIMAIS;
- ✓ Seleção natural;
- ✓ Eugenia = Seleção artificial.

2. Em que consiste o estudo da seleção natural de Charles Darwin e o que ele tem a ver com a Eugenia?

2 A SELEÇÃO NATURAL OCORRE ATRAVÉS DA CONFORMAÇÃO DE CERTAS PROPRIEDADES BENÉFICAS AO CONTEXTO AMBIENTAL, AS QUAIS SÃO LEGADAS HEREDITARIAMENTE PARA OS SECESSORES DOS SERES VIVOS.

3. Quais possíveis problemas a Eugenia traz para a sociedade?

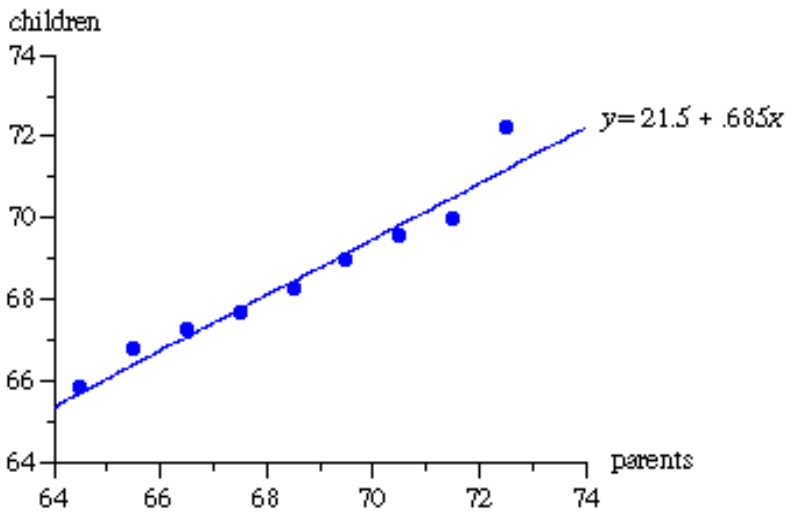
- ✓ **Preconceito;**
- ✓ **Nazismo;**
- ✓ **Imposição;**
- ✓ **Racismo;**
- ✓ **...**

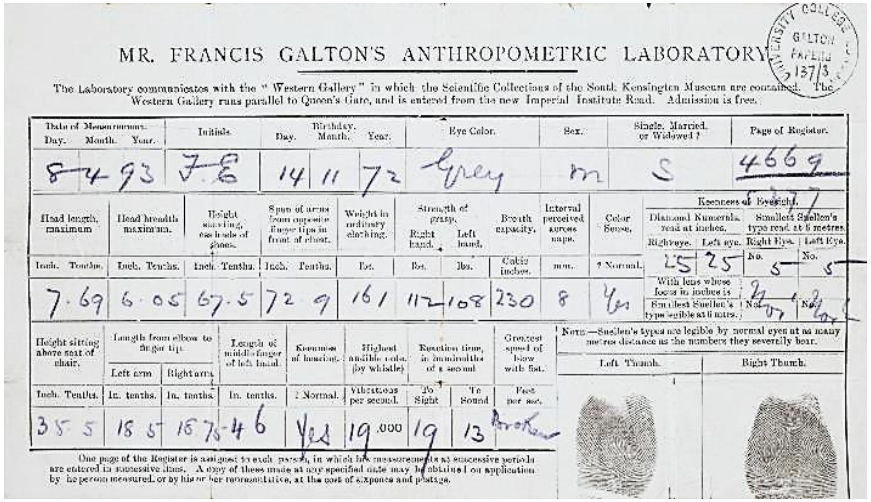
4. Acha que a Eugenia tem haver com Matemática? Caso sim, o quê? Caso não, acha que poderia ter?

"Professora, essa resposta é meio óbvia, porque para ter a Eugenia você precisa de um padrão e para ter esse padrão você precisa de números para medir. Logo, tem tudo a ver com a Matemática!"

4. Acha que a Eugenia tem haver com Matemática? Caso sim, o quê? Caso não, acha que poderia ter?

- ✓ ***Relação de pais e filhos (pares ordenados);***
- ✓ ***Previsão das características dos filhos a partir das características dos pais (função);***
- ✓ ***Coleta e análise de dados, medidas, média, gráficos ... (Estatística).***




MR. FRANCIS GALTON'S ANTHROPOMETRIC LABORATORY

The Laboratory communicates with the "Western Gallery" in which the Scientific Collections of the South Kensington Museum are contained. The Western Gallery runs parallel to Queen's Gate, and is entered from the new Imperial Institute Road. Admission is free.

Date of Measurement. Day.	Month.	Year.	Initials.	Birthday. Day.	Month.	Year.	Eye Color.	Sex.	Single, Married, or Widowed?	Page of Register.
8	4	93	F.G.	14	11	72	Grey	m	S	4669

Head length, maximum.	Head breadth, maximum.	Height standing, on heels of shoes.	Span of arms from opposite finger tips in front of chest.	Weight in ordinary clothing.	Strength of grasp. Right hand.	Left hand.	Breath capacity.	Internal perceived curves, angle.	Color Sense.
Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	Inch. Tenths.	lbs.	lbs.	lbs.	Cubic inches.	mm.	? Normal.
7.69	6.05	67.5	72.9	161	112	108	230	8	Yes

Keenness of Eyesight. Diamond Numerals, read at inches. Right eye.	Left eye.	Smallest Snellen's type read, at 6 metres. Right Eye.	Left Eye.
25	25	No. 5	No. 5
With lens whose focus in inches is			
Smallest Snellen's type legible at 6 metres.		No.	No.

Height sitting above seat of chair.	Length from elbow to finger tip. Left arm	Right arm	Length of middle finger of left hand.	Keenness of hearing.	Highest audible note, (by whistle)	Reaction time, in hundredths of a second.		Greatest speed of blow with fist.
Inch. Tenths.	In. tenths.	In. tenths.	In. tenths.	? Normal.	Vibrations per second.	To Sight	To Sound	Feet per sec.
35.5	18.5	16.75	4.6	Yes	19.000	19	13	Brother

NOTE.—Snellen's types are legible by normal eyes at as many metres distance as the numbers they severally bear.

Left Thumb. Right Thumb.

One page of the Register is assigned to each person, in which his measurements at successive periods are entered in successive lines. A copy of these made at any specified date may be obtained on application by the person measured, or by his or her representative, at the cost of expenses and postage.

5. Descreva algumas situações em que você já ouviu falar em média (ou em valor médio).

apenas dois alunos não citaram **média escolar** como exemplo.

Renda média mensal

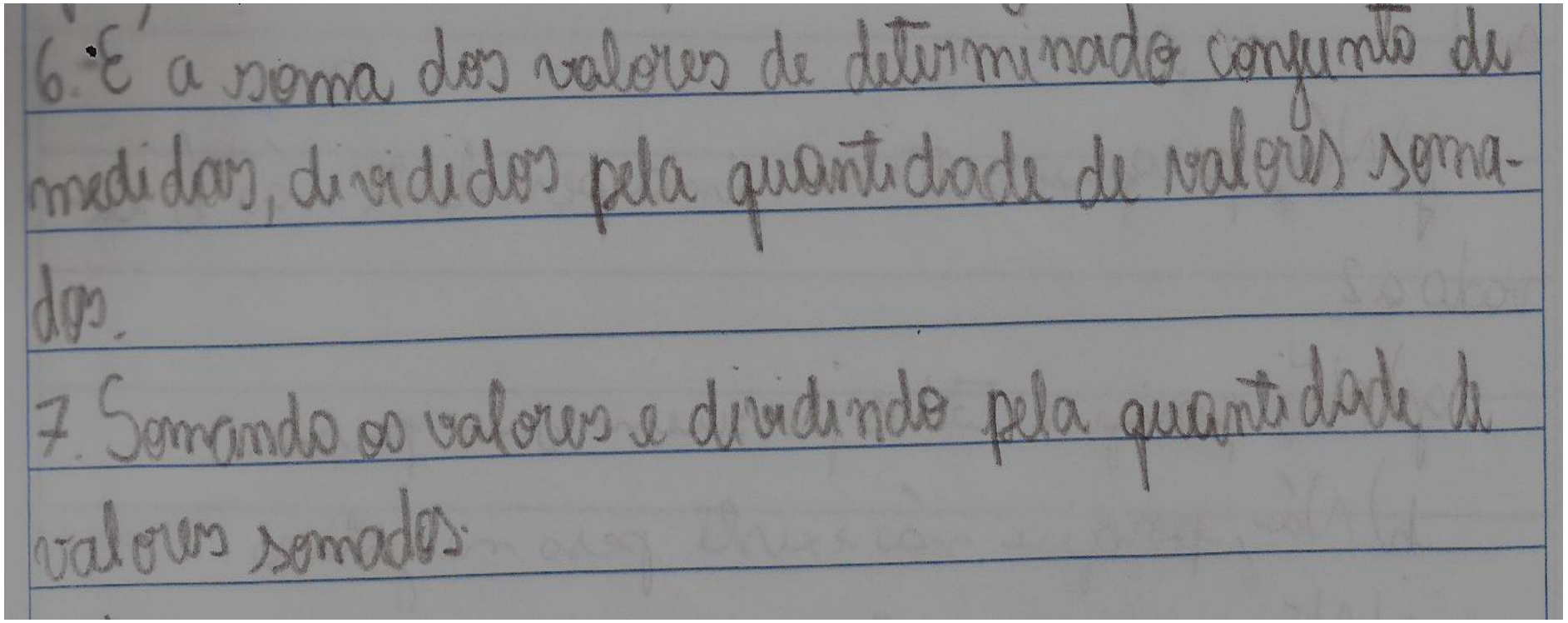
Velocidade média

Expectativa média de vida

...

6. O que significa média?

7. Como se calcula a média aritmética de um conjunto de valores conhecidos? Cite um exemplo.



6. É a soma dos valores de determinado conjunto de medidas, divididos pela quantidade de valores somados.

7. Somando os valores e dividindo pela quantidade de valores somados.

6. O que significa média?

Média - Dicionário Online

www.dicio.com.br/media/

Dicio dicionário online de português

Curtir 112 mil

média buscar

média

Compartilhe no Facebook Curtir 3

Significado de Média

s.f. Coisa, quantidade que ocupa o meio entre várias outras.

Número que exprime o valor que teria cada uma das parcelas de uma soma se, permanecendo essa soma invariável, todas as parcelas fossem iguais entre si: tirar a média.

A soma de quantidades diferentes dividida pelo número delas; termo médio.

Estatística. Um dos grupos de valores médios principais.

Bras. Pop. Xícara grande de café ou qualquer outra bebida, por oposição à xícara pequena, de cafezinho.

Em média, considerando as coisas uma pelas outras, as diferenças se equivalem.

6. O que significa média?

Média - Dicionário Online

www.dicio.com.br/media/

Dicio dicionário online de português

Curtir 112 mil

média buscar

média

Compartilhe no Facebook Curtir 3

Significado de Média

s.f. Coisa, quantidade que ocupa o meio entre várias outras.

Número que exprime o valor que teria cada uma das parcelas de uma soma se, [illegible] essa soma invariável, todas as parcelas f[illegible]re si: tirar a média.

A soma d[illegible] termo médio.

[illegible] grupos de valores médios princip[illegible]

Bras. Pop. Xícara grande de café ou qualquer outra bebida, por oposição à xícara pequena, de cafezinho.

Em média, considerando as coisas uma pelas outras, as diferenças se equivalem.

6. O que significa média?

7. Como se calcula a média aritmética de um conjunto de valores conhecidos? Cite um exemplo.

Média aritmética

Média ponderada

Média geométrica

Média harmônica

Valor que aponta para onde mais se concentra uma distribuição.

8. No que você lembra quando ouve ou lê a palavra *regredir*?

Voltar

Retroceder

Diminuir

Atrasar

9. O que significa regredir à média?

Medicina Baseada em Evi

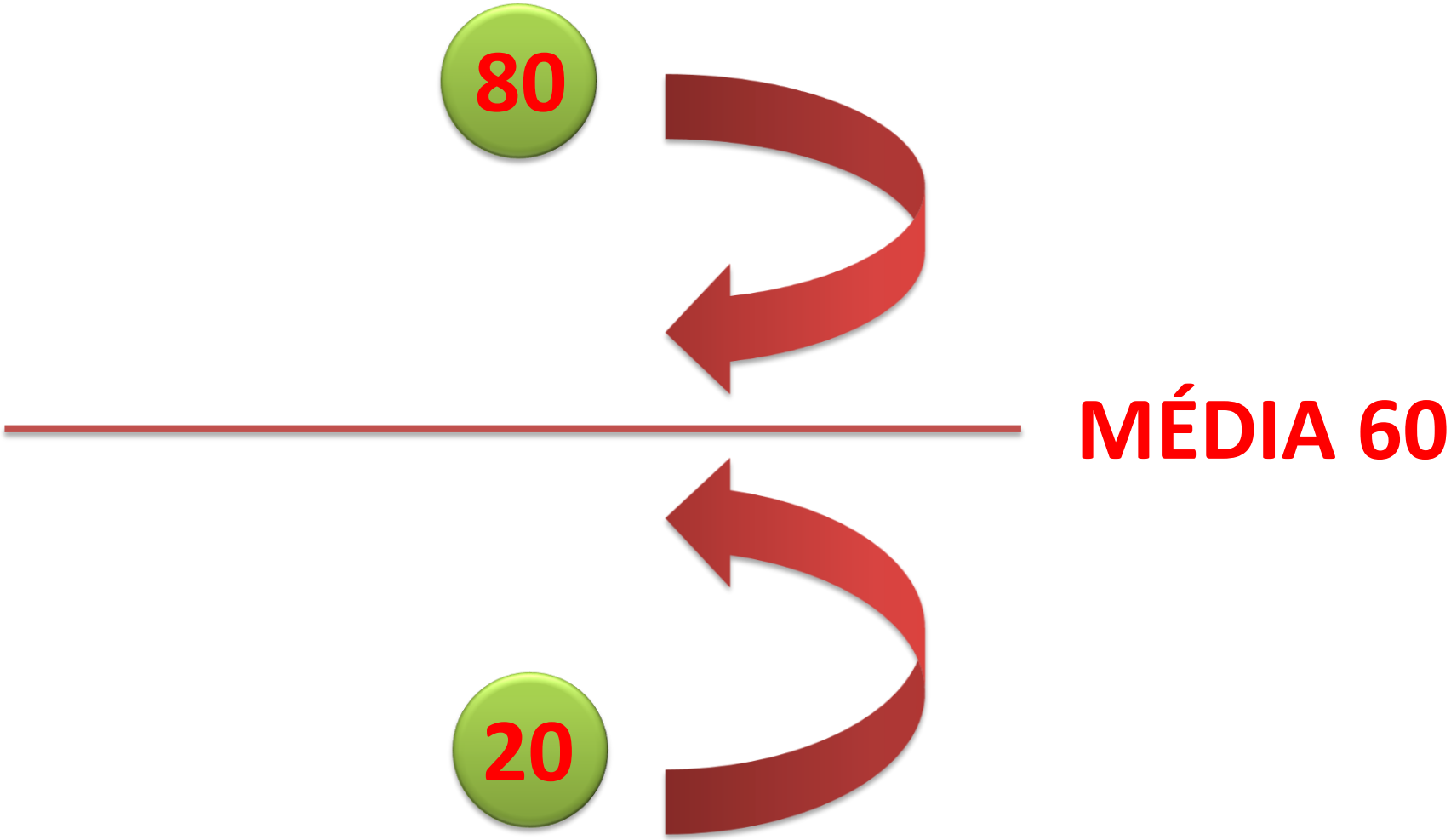
medicinabaseadaemevidencias.blogspot.com.br/2011/06/o-extraordinario-fenomeno-de-regressao.ht

Imaginem um aluno mediano, daquele que tira sempre a nota mínima para passar de ano, digamos 5,0. Um belo dia esse aluno chega em casa com uma nota 9,0 em matemática (sem ter colado na prova, ou seja, nota verídica). Os pais ficam felizes, elogiam e até lhes compram um belo presente, na intenção de que o incentivo perpetue aquele extraordinário desempenho do garoto. No entanto, na prova seguinte, o aluno volta a seu padrão mediano, recebendo uma nota 6,0. Os pais pensam: **não se pode elogiar**, temos que ser mais duros com ele. Mas não foi a moleza dos pais que provocou a queda do aproveitamento, foi o fenômeno de regressão à média. Na verdade, o normal do garoto é tirar notas medianas, a nota 9,0 foi obra meramente do acaso e o acaso tende a não se repetir. Por isso que no próximo teste o garoto vai regredir à média de suas notas ao longo do ano.

9. O que significa regredir à média?

09. A regressão à média é o fenómeno que se apresenta quando uma variável extrema na sua primeira medição, ela tendera a ser mais próximo da segunda medição

9. O que significa regredir à média?

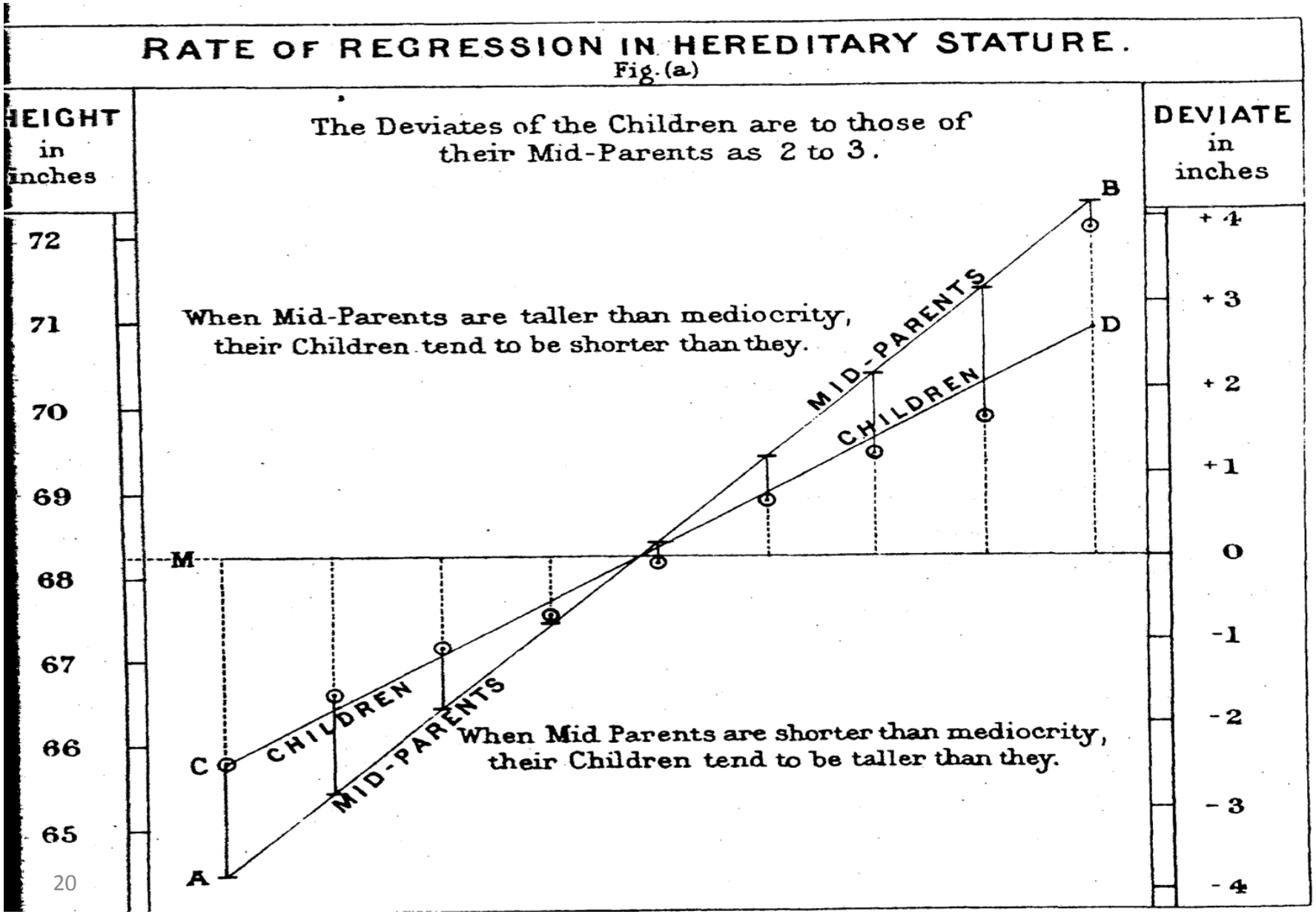


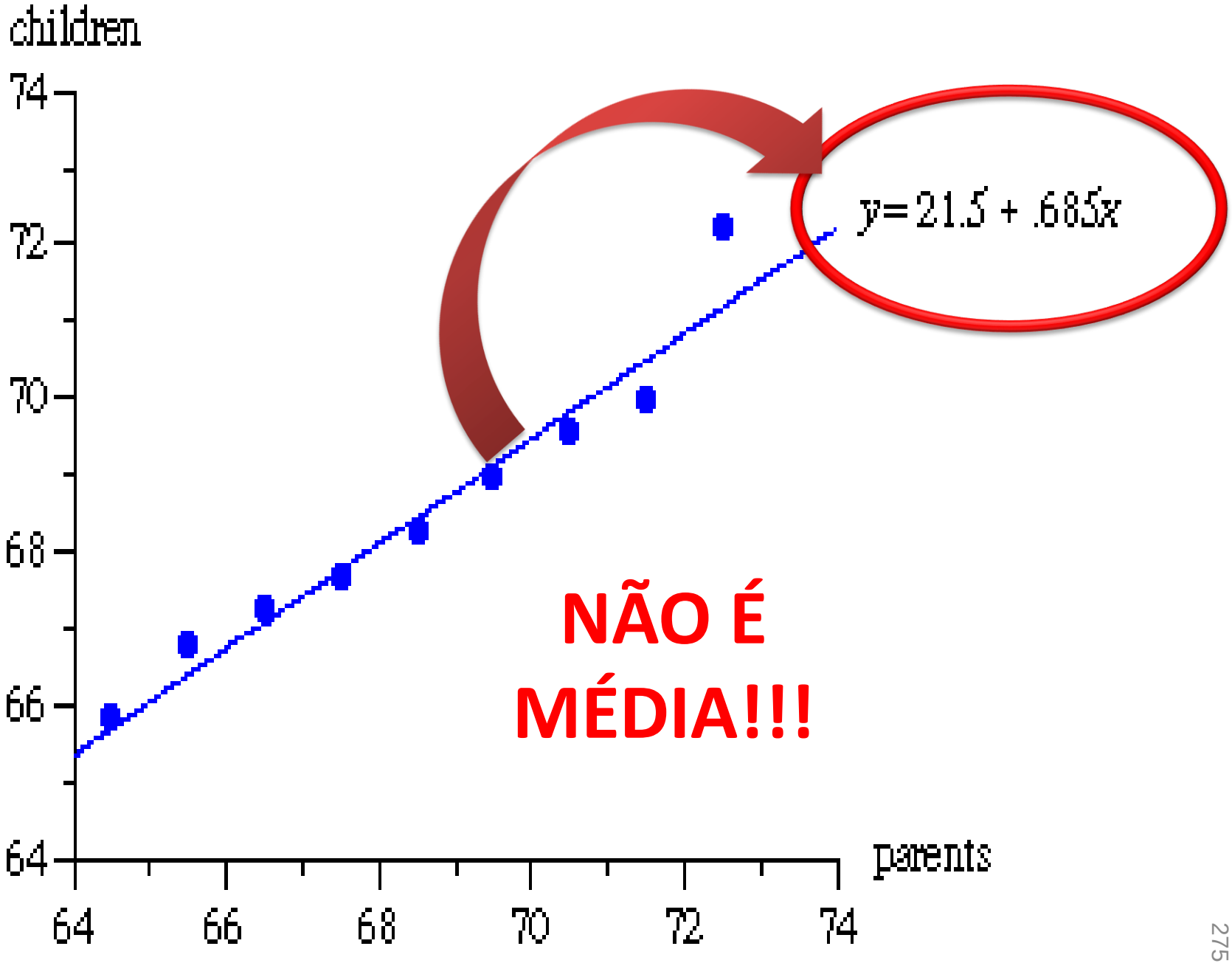
9. O que significa regredir à média?

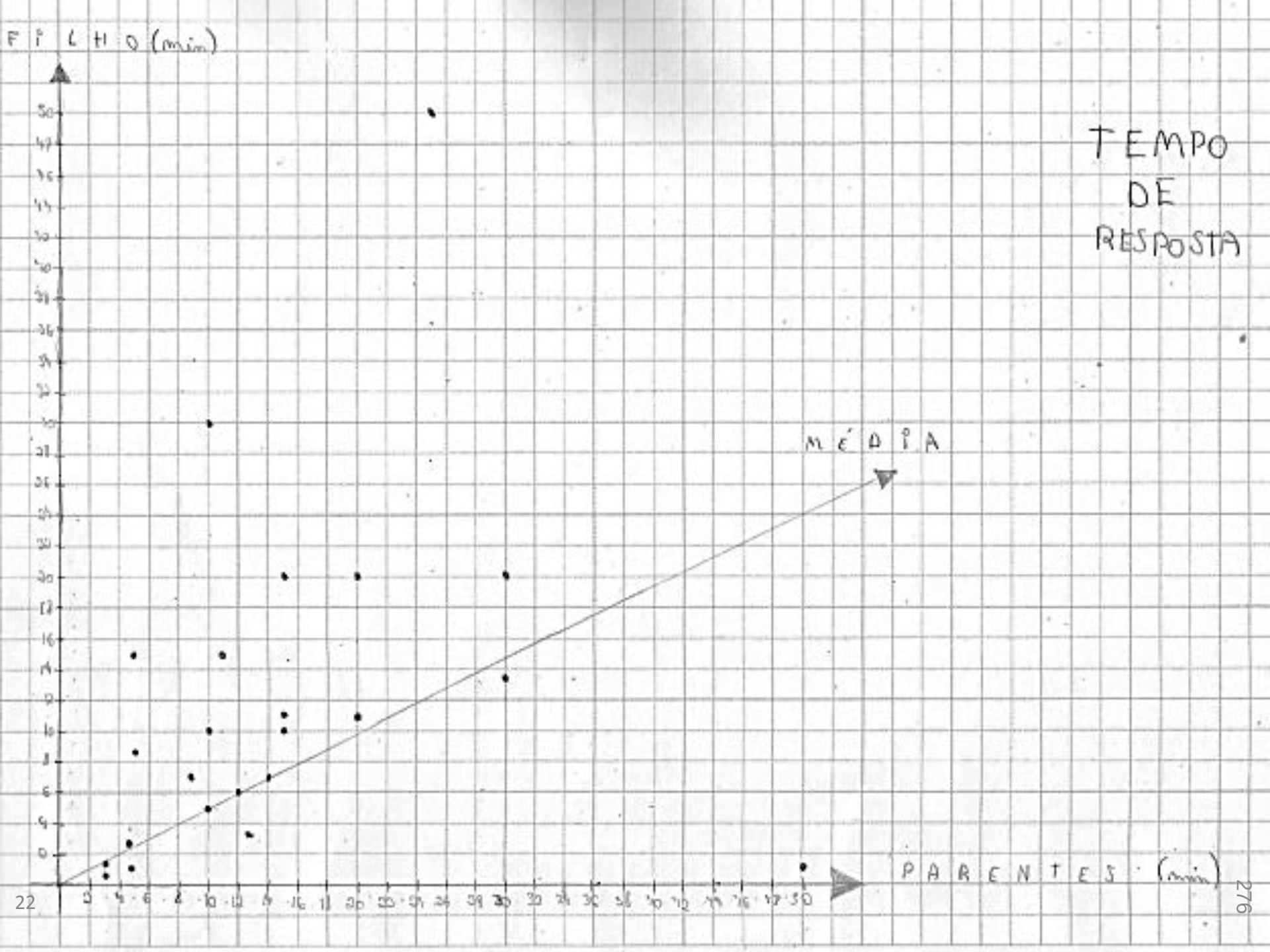
Galton se deu conta de que qualquer processo que não apresentasse a regressão à média iria acabar fora de controle. Por exemplo, suponha que os filhos de pais altos tivessem, em média, a mesma altura dos pais. Como as alturas variam, alguns filhos seriam mais altos. Agora imagine a geração seguinte e suponha que os filhos dos filhos mais altos, netos da geração original, também fossem, em média, tão altos quanto os pais. Dessa forma, com o passar das gerações, os seres humanos mais altos seriam cada vez mais altos. Devido à regressão à média, isso não acontece. (MLODINOW, 2009, p.173)

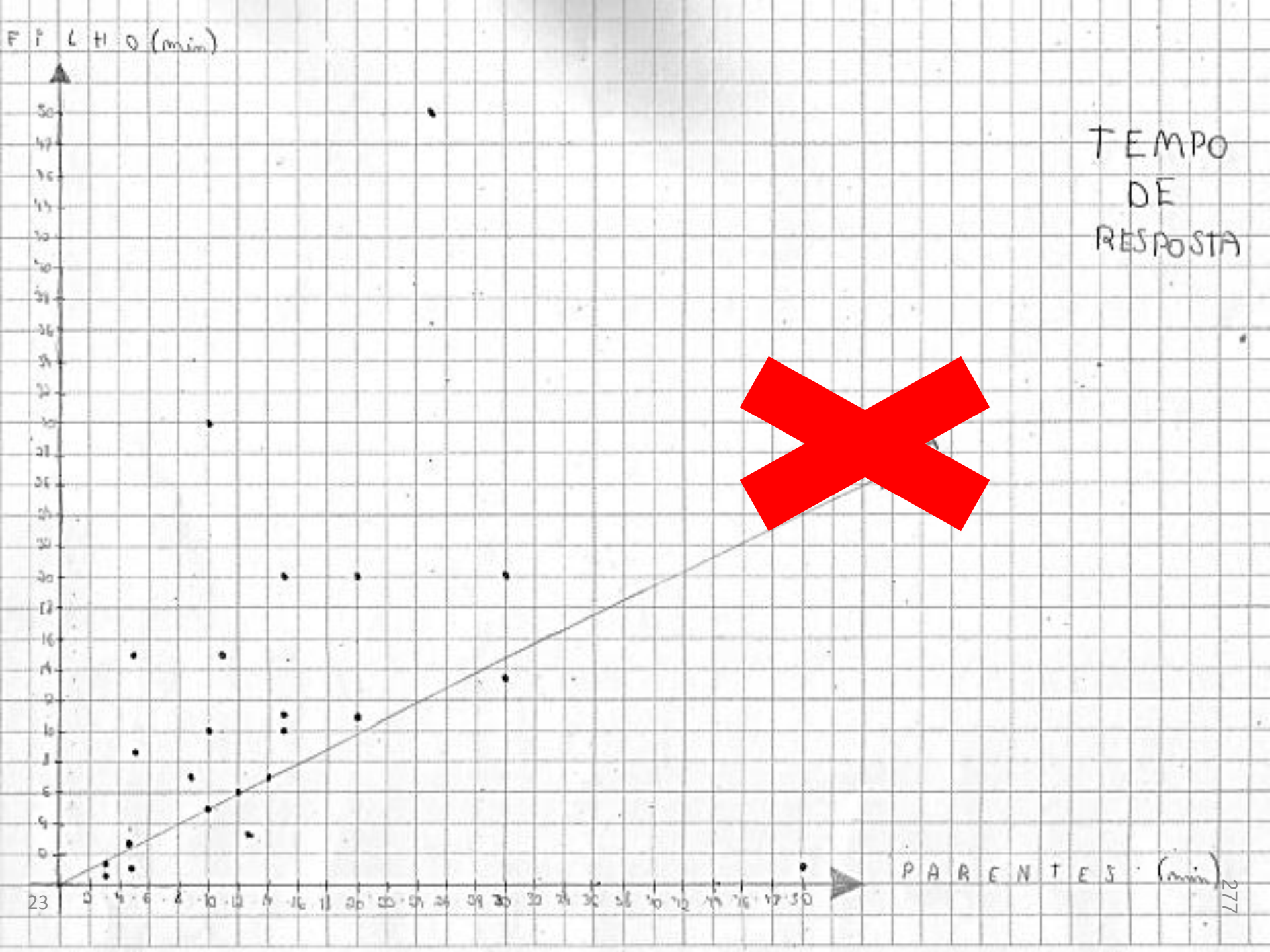
9. O que significa regredir à média?

9. O que significa regredir à média?

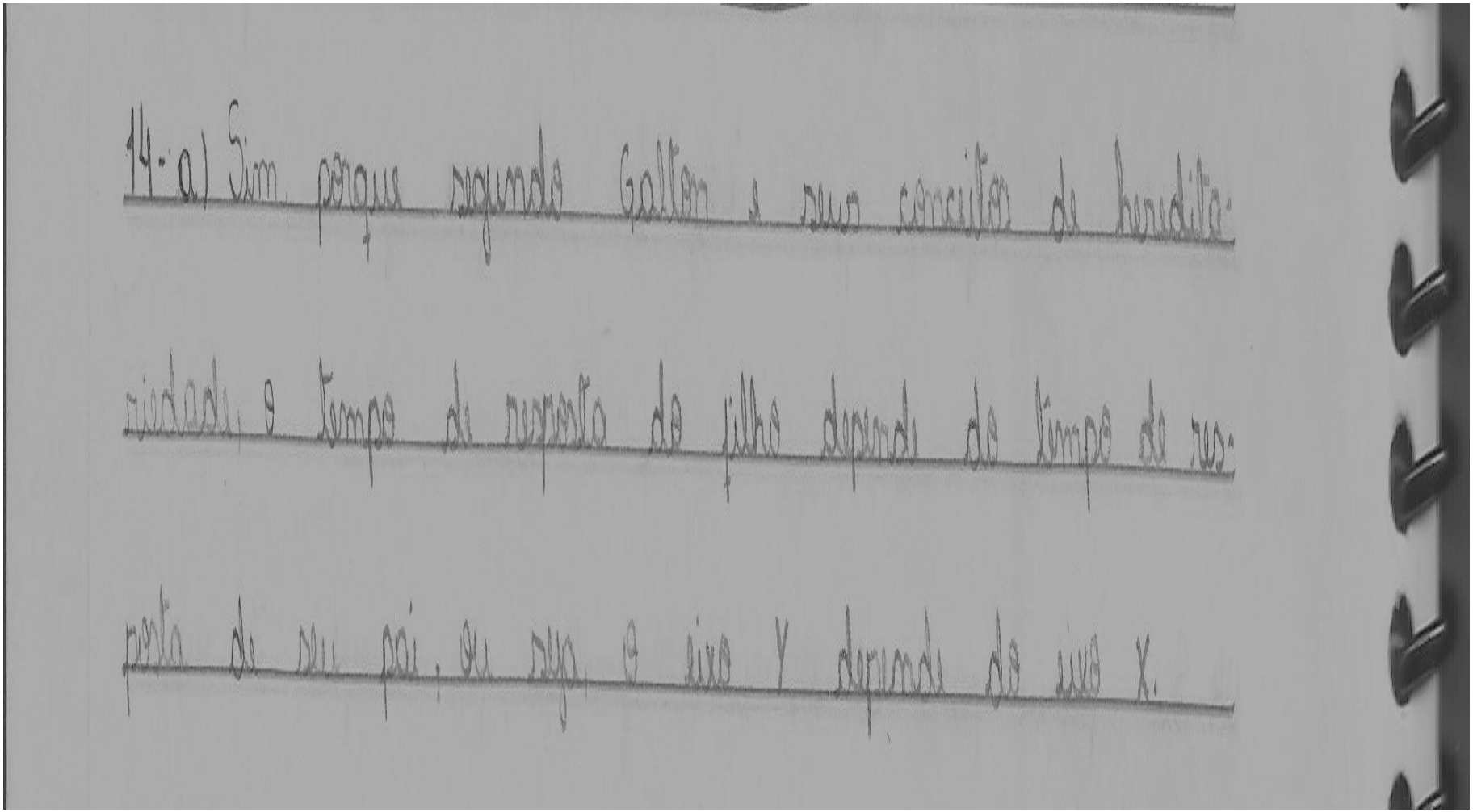



children
74
72
70
68
66
64
64
66
68
70
72
74
parents
y=21.5 + .685x
NÃO É MÉDIA!!!


FILHO (min)
TEMPO DE RESPOSTA
MÉDIA
PARENTES (min)


FILHO (min)
PARENTES (min)
TEMPO
DE
RESPOSTA

a) Existe uma relação de dependência entre os dois eixos do plano (horizontal e vertical)?



14. a) Sim, porque segundo Galton a sua concepção de hereditariedade, o tempo de resposta do filho depende do tempo de resposta do seu pai, ou seja, o eixo Y depende do eixo X.

a) Existe uma relação de dependência entre os dois eixos do plano (horizontal e vertical)?

22/07/15

14 → a) Não, porque o parente pode não ter uma alimentação adequada, pode passar por doenças. Então a massa ela não tem relação, porque depende muito do estilo de vida da pessoa.

a) Existe uma relação de dependência entre os dois eixos do plano (horizontal e vertical)?

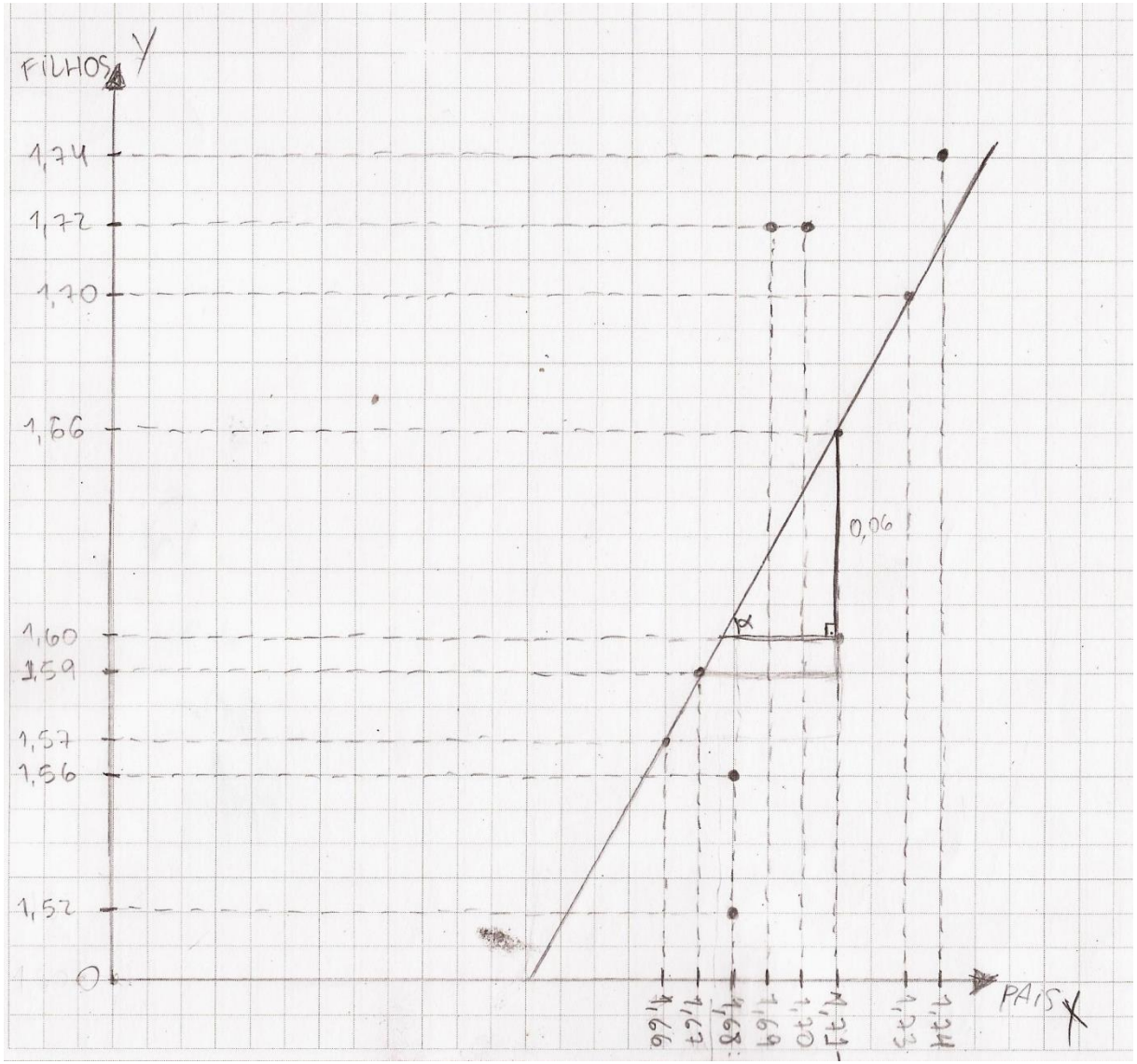
Aluna P: "Se eu olhar para o gráfico eu vejo que a massa do filho aumenta conforme a da mãe, mas não necessariamente isso vai sempre acontecer porque eu posso ser bem magra e minha mãe gordinha ou vice versa".

Professora: "Por isso que existem esses pontos fora da reta".

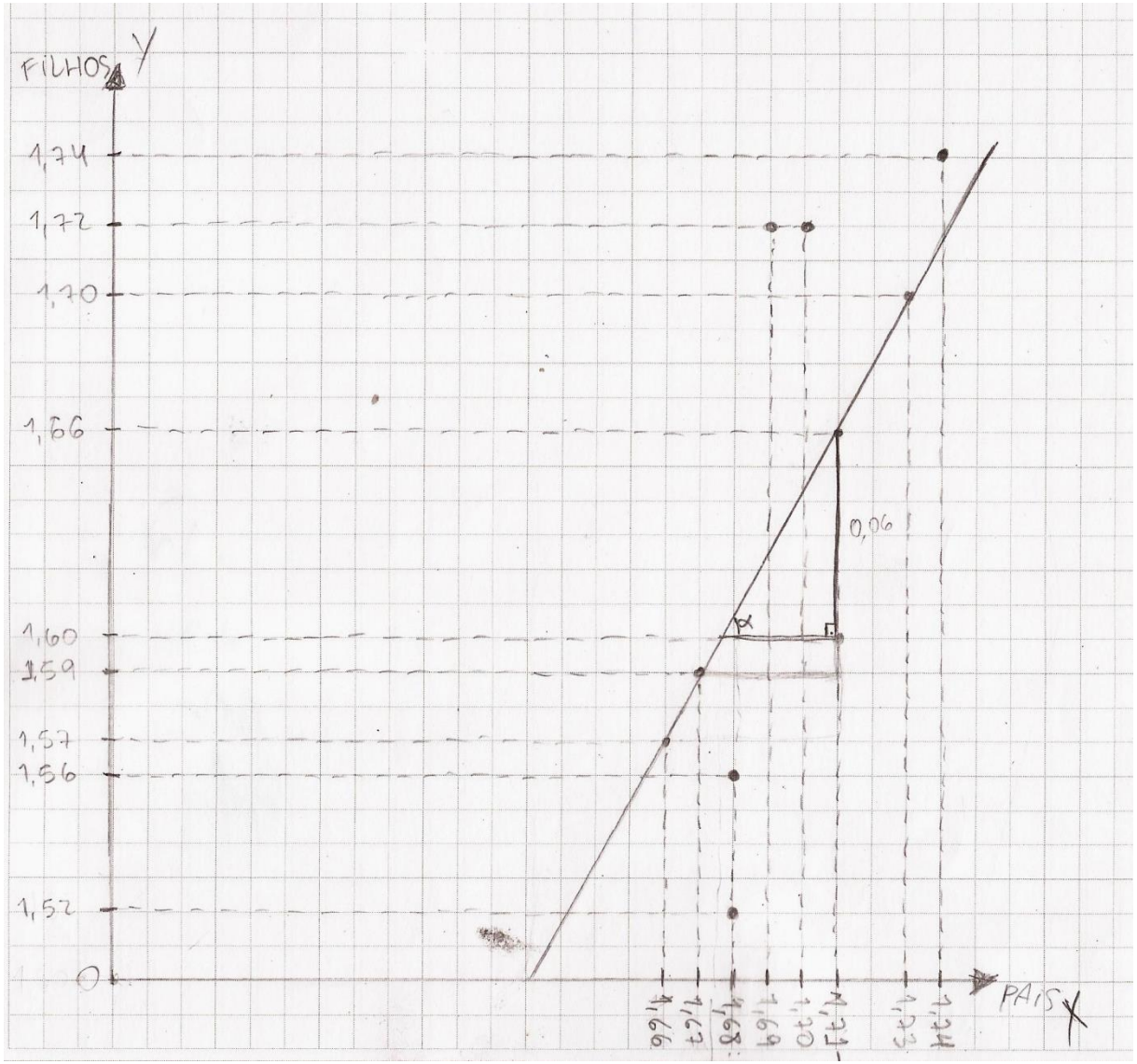
Aluno A: "Professora, nesse meu gráfico eu posso afirmar que os filhos demoram mais tempo para responder o jogo do que os parentes?".

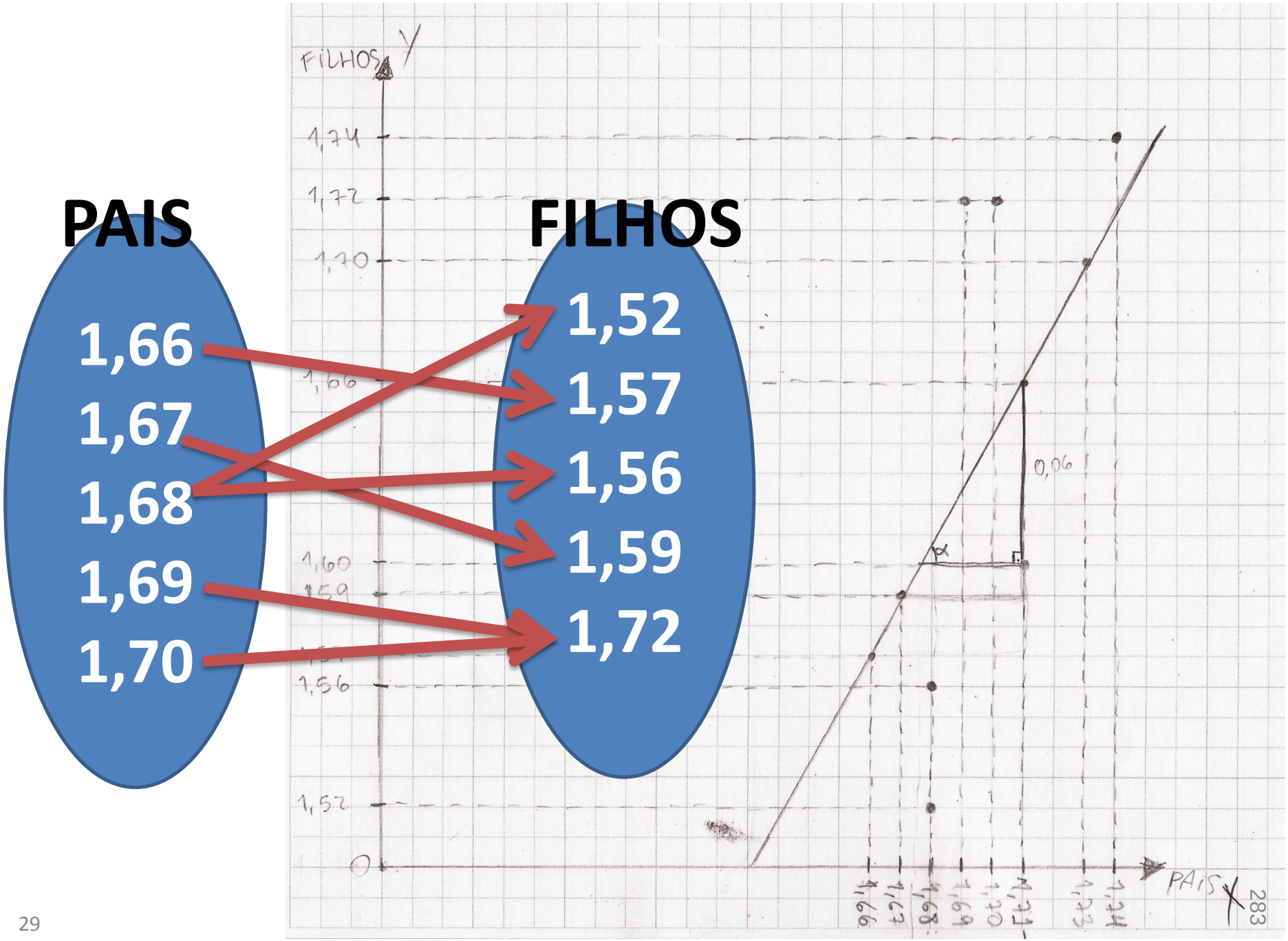
Aluno A: "Os dois aumentam".

b) A variável do eixo x (horizontal) permite ter mais de um correspondente?



c) A variável do eixo y (vertical) permite ter mais de um correspondente?



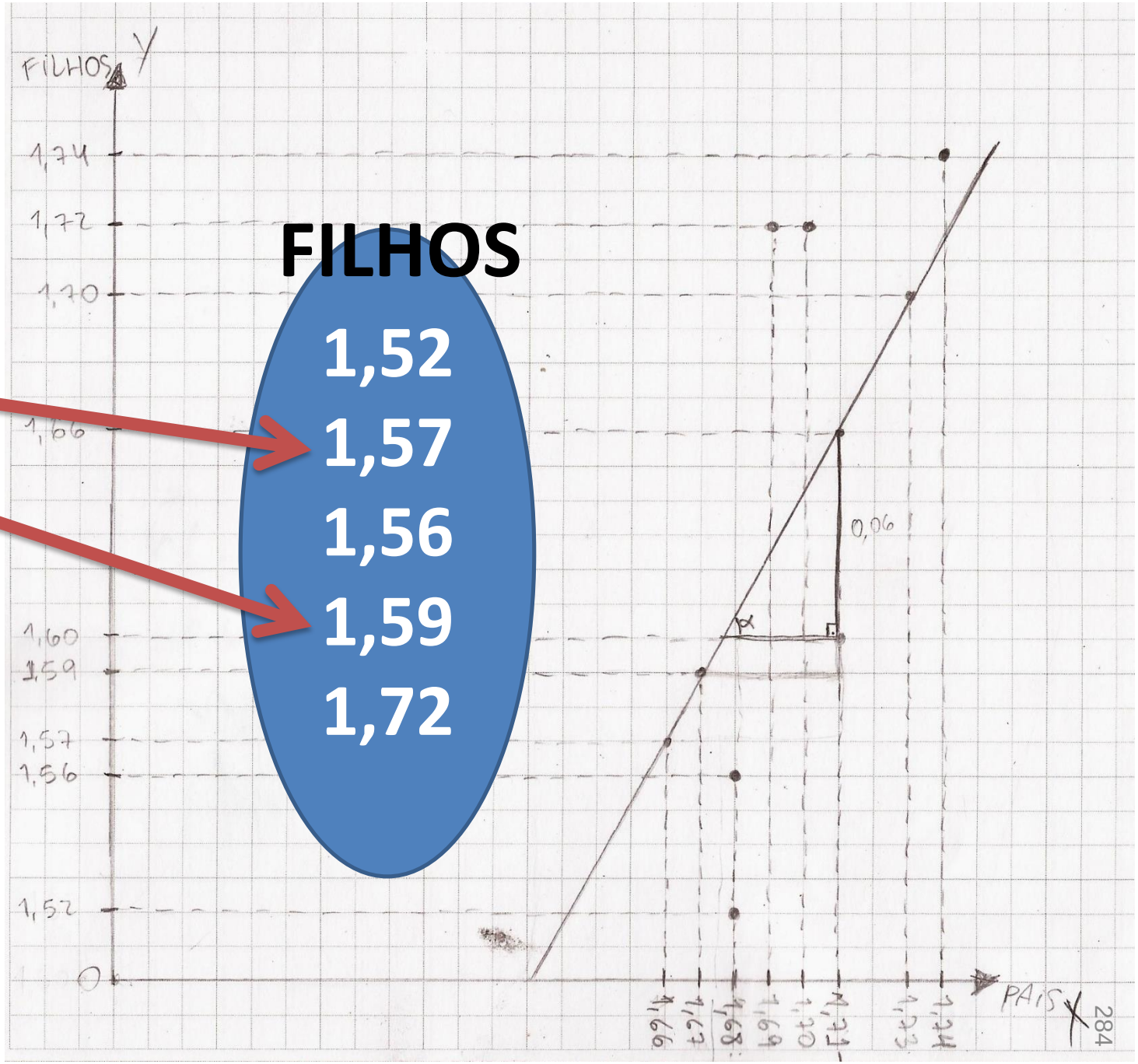

PAIS
1,66
1,67
1,68
1,69
1,70
FILHOS
1,52
1,57
1,56
1,59
1,72
FILHOS
Y
1,74
1,72
1,70
1,66
1,60
1,59
1,56
1,52
0
0,06
α
PAIS
X
1,66
1,67
1,68
1,69
1,70
1,71
1,73
1,74

PAIS

1,66
1,67
1,68
1,69
1,70

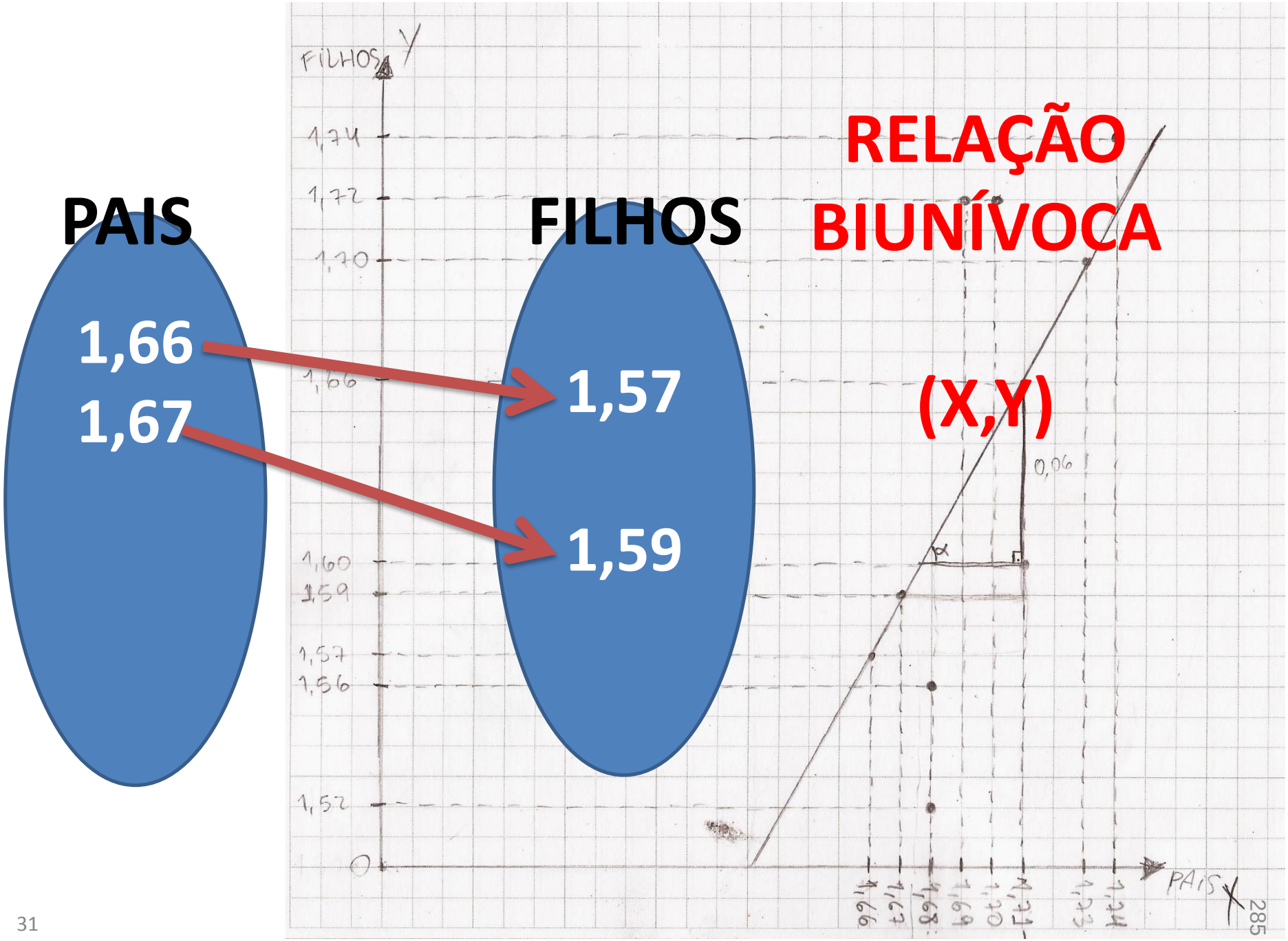
FILHOS

1,52
1,57
1,56
1,59
1,72



RELAÇÃO BIUNÍVOCA

(X,Y)



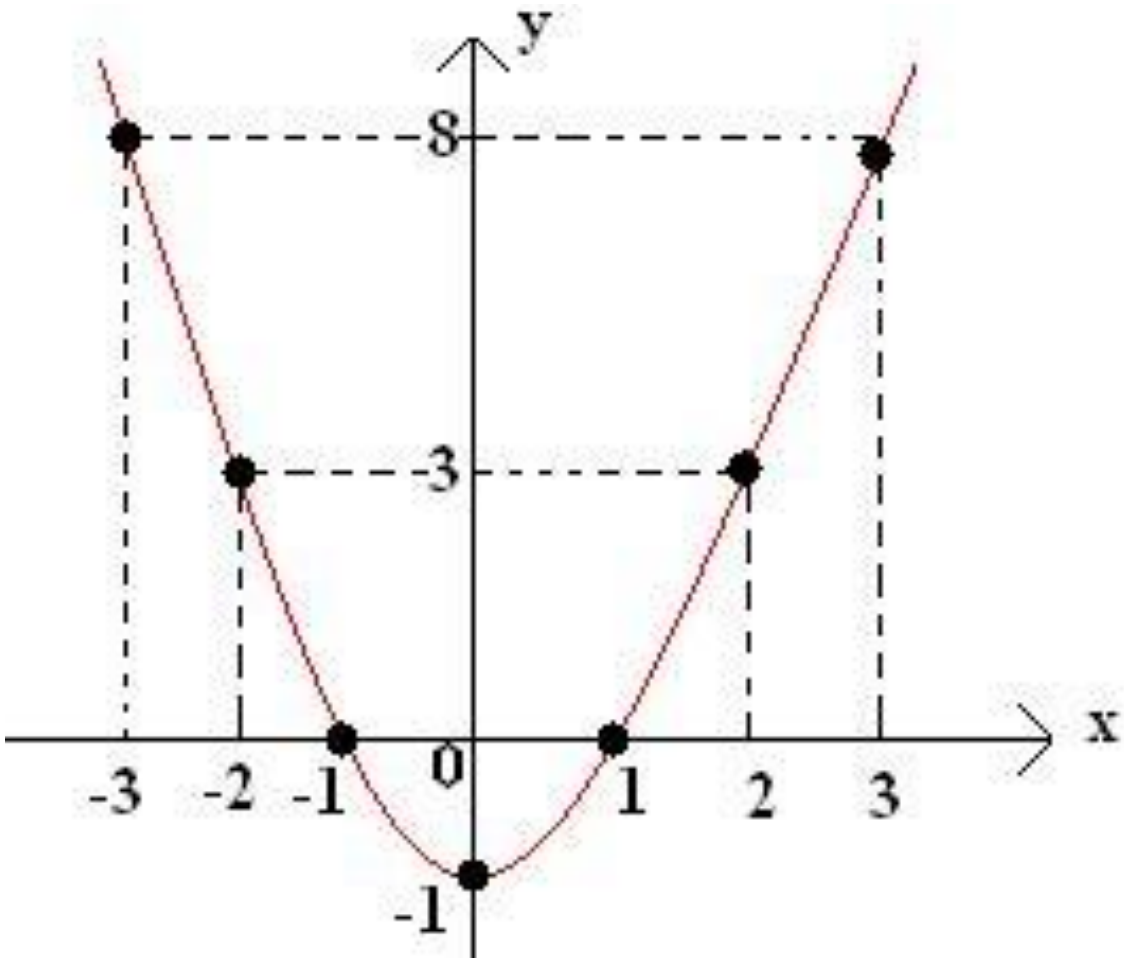
d) Por que o gráfico traçado é de uma função?

Tem relação de dependência

(características dos filhos dependem das características dos pais).

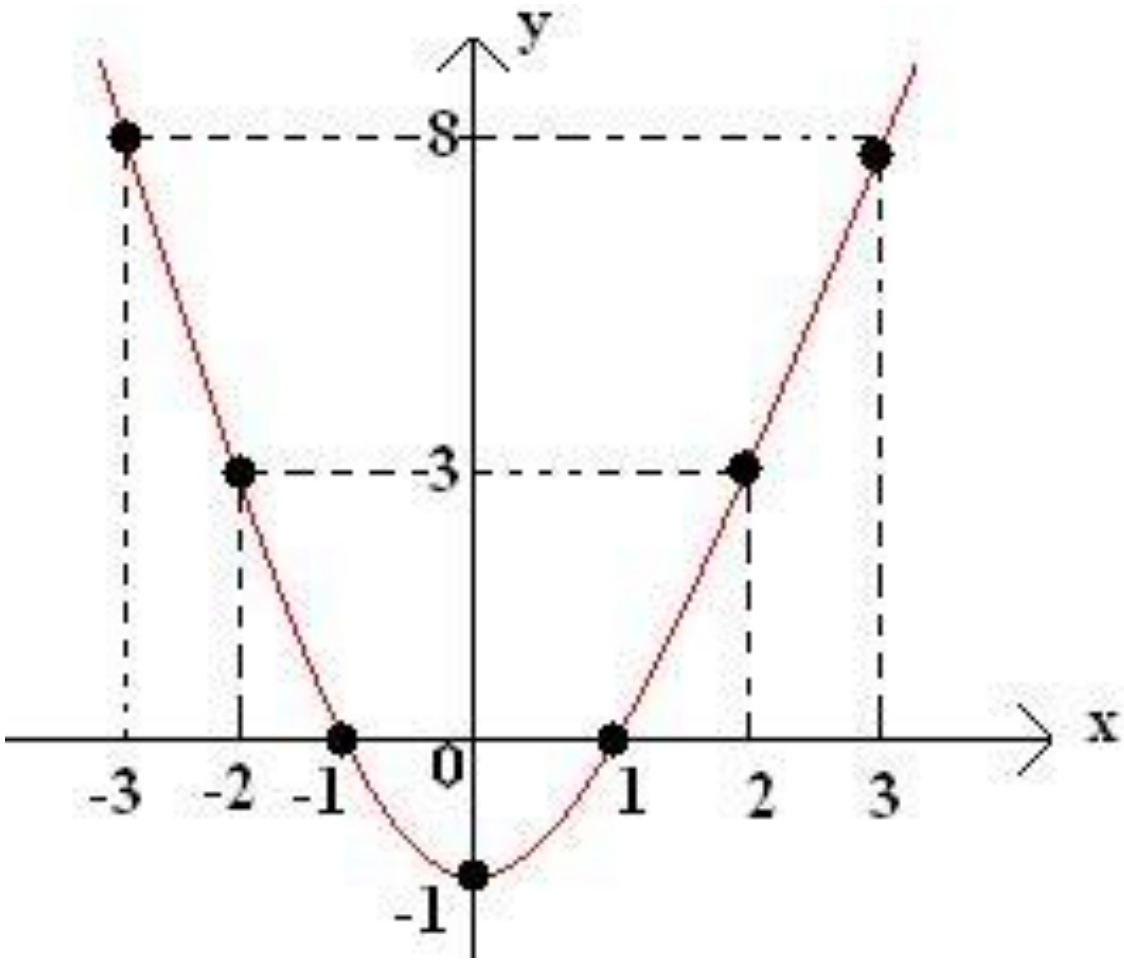
e) A função pode ser afim?

- ✓ **RETA;**
- ✓ **Expoente da variável x;**
- ✓ **Relação biunívoca.**



f) A função pode ser quadrática?

- ✓ **Expoente da variável = 2;**
- ✓ **Relação NÃO biunívoca;**
- ✓ **Parabóla.**



g) A função pode ter o termo independente nulo?

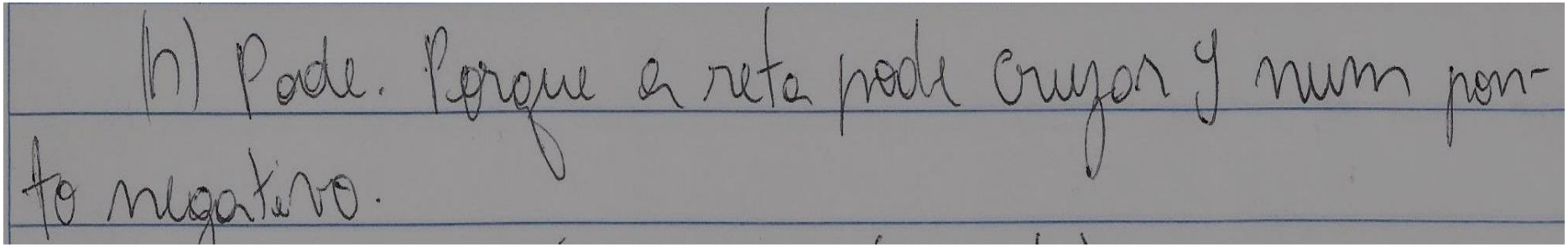
g) Pode. Porque y pode ser igual a somente ~~ax~~ ax.

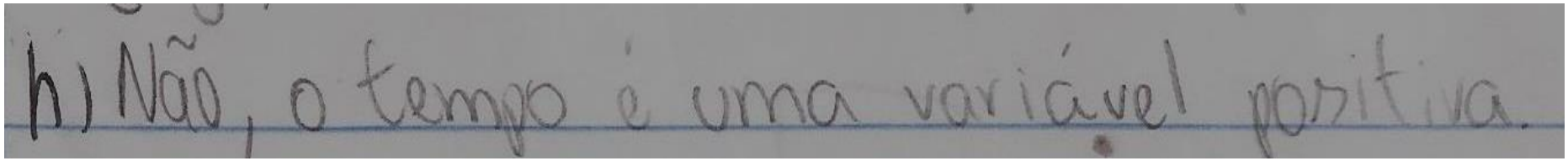
g) Não, pois cada pessoa tem que levar pelo menos 1s para completar o jogo, a variável do tempo não pode ser nula

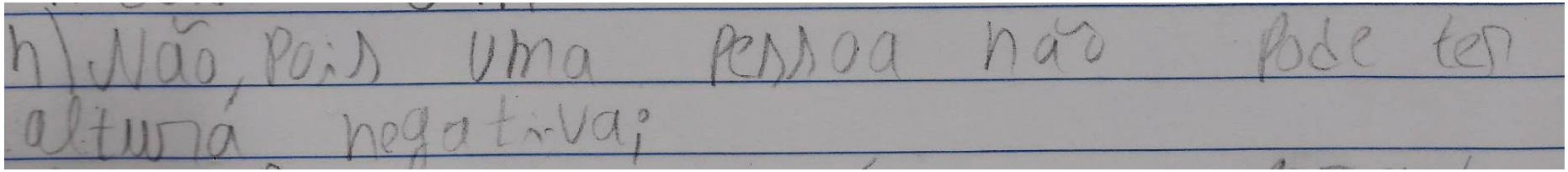
g) Não, pois uma pessoa não pode medir 0 m

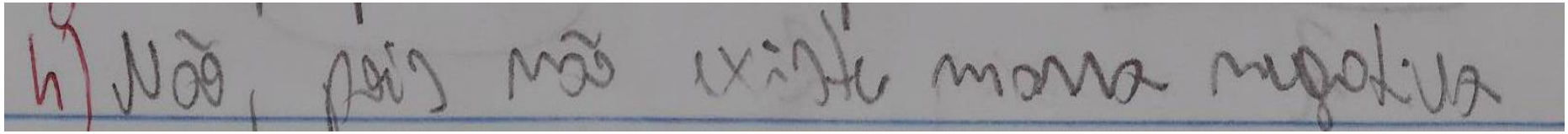
g) Não, porque todos possuem uma mona.

h) A função pode ter o termo independente negativo?

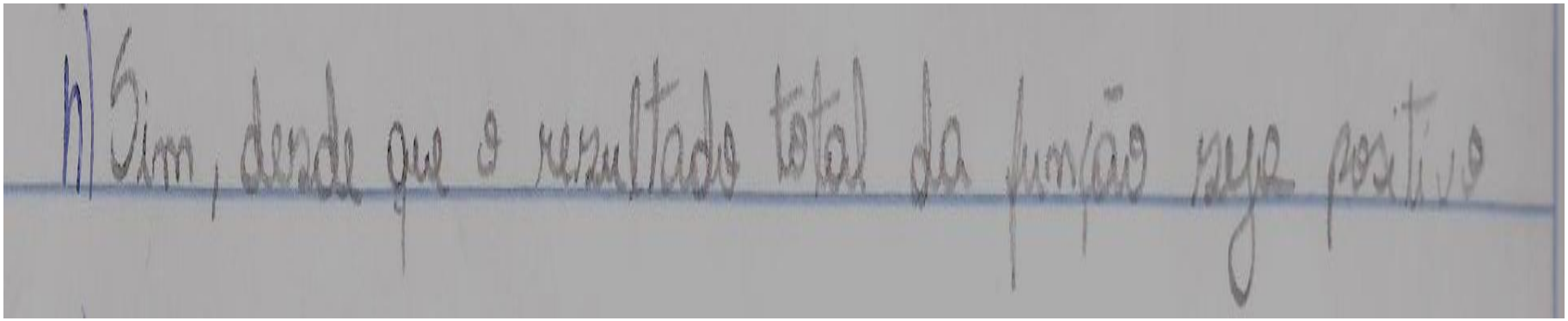

h) Pode. Porque a reta pode cruzar y num ponto negativo.

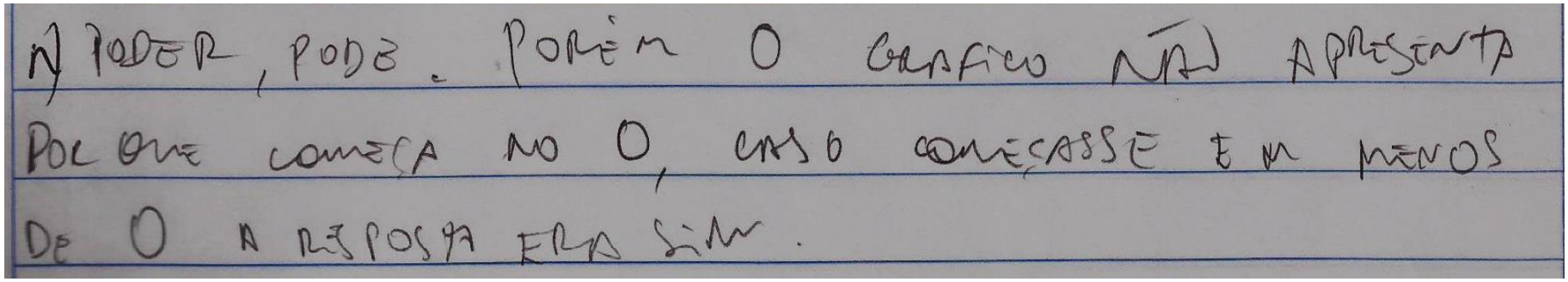

h) Não, o tempo é uma variável positiva.


h) Não, pois uma pessoa não pode ter altura negativa;


h) Não, pois não existe massa negativa

h) A função pode ter o termo independente negativo?


h) Sim, desde que o resultado total da função seja positivo


h) PODER, PODE. PORÉM O GRÁFICO NÃO APRESENTA POR QUE COMEÇA NO 0, CASO COMEÇASSE EM MENOS DE 0 A RESPOSTA ERA SIM.

i) A função pode ter coeficiente angular negativo?

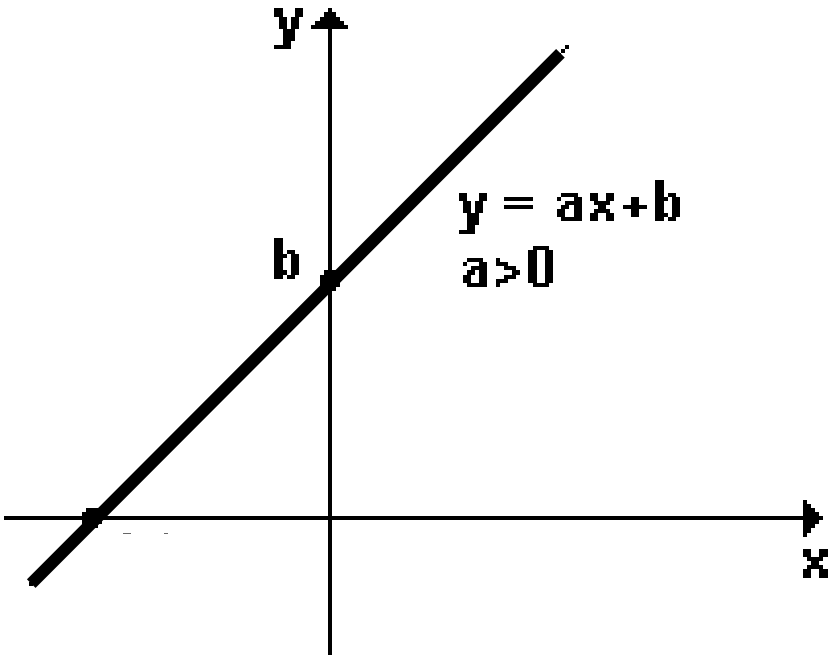
i) Não, pois é crescente (a reta) e consequentemente a é positivo

i) Não, assim o tempo seria negativo

i) Não, por que a média dos tempo não são negativas.

i) Não, porque a mola seria negativa.

i) Sim, quando está decrescendo



$x \neq a$

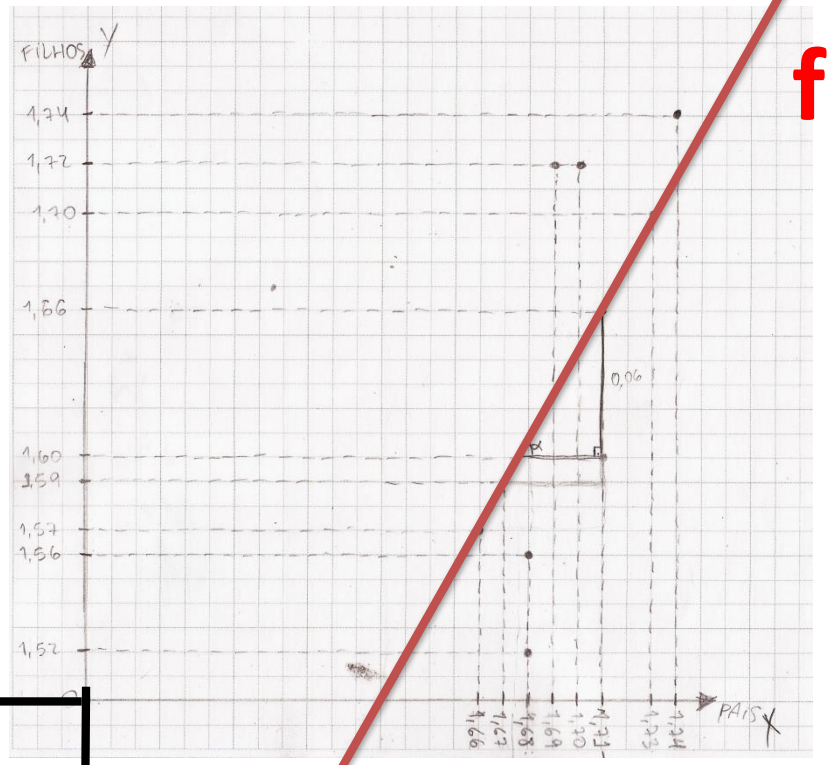
$y \neq b$

x → variável independente

b → termo independente ou coeficiente linear

y → variável dependente

a → coeficiente angular



a b

$$f(x) = 2x - 1{,}76$$

$$y = 2x - 1{,}76$$

$$f(1{,}66) = 2 \cdot 1{,}66 - 1{,}76$$

$$f(1{,}66) = 1{,}56$$

x y

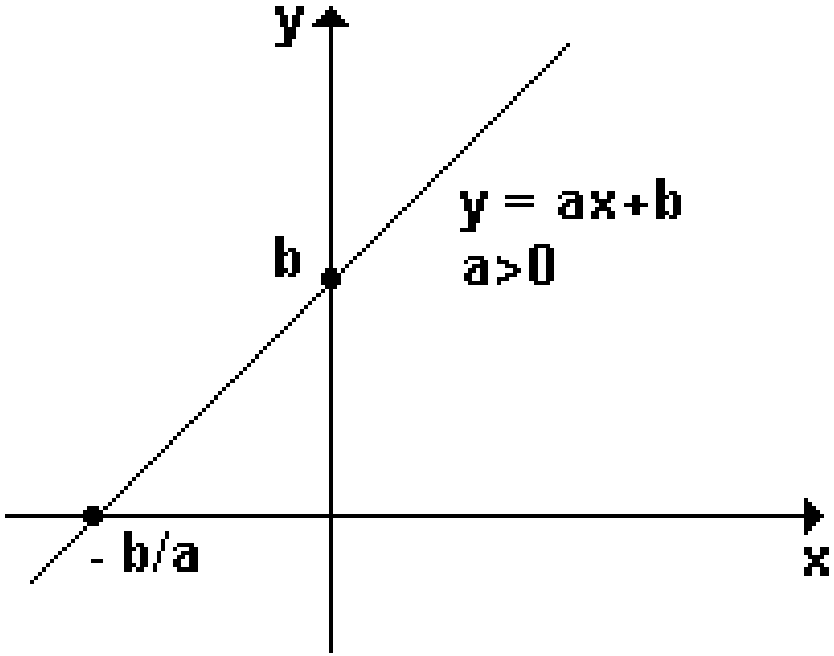
-b

j) Qual o ângulo de inclinação dessa reta e o que isso representa na função?

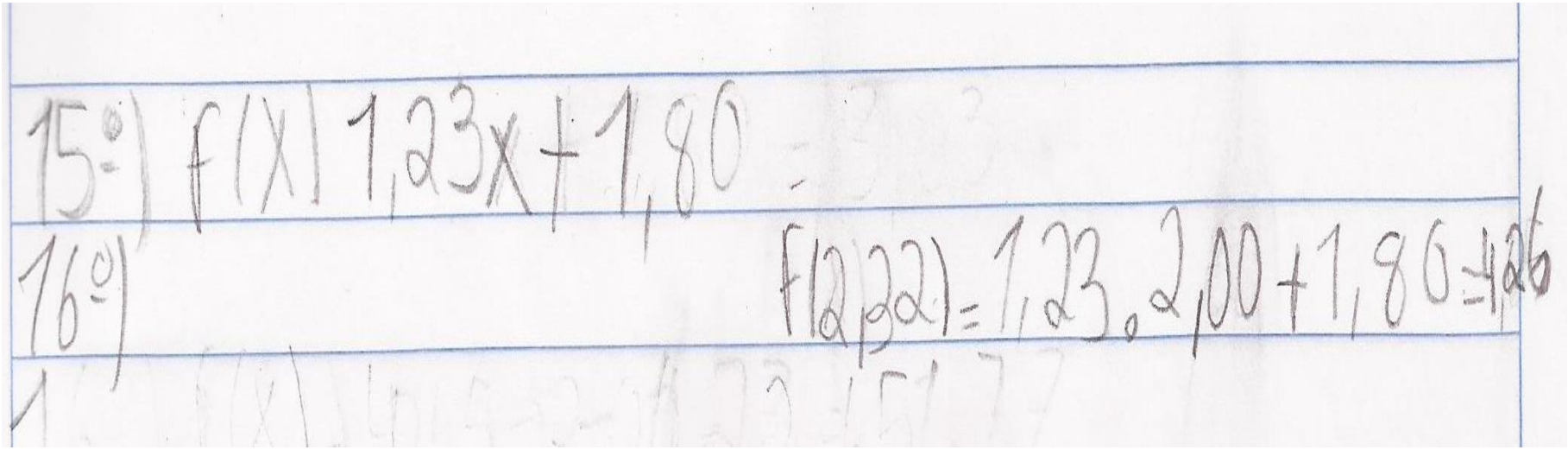
- ✓ **Ângulo ≠ a**
- ✓ **Tangente do ângulo = a**

k) Como é possível saber exatamente os valores dos coeficientes numéricos da função?

- ✓ a = tangente do ângulo;
- ✓ b = valor no eixo y onde a reta passa;
- ✓ Sistema de equações com dois pares ordenados;
- ✓ Zero da função.



15. Após todas as respostas registradas, tente estimar a função que melhor representa a reta por você traçada. Analise os melhores valores para os coeficientes numéricos da função e o melhor expoente da variável x.



$$f(x) = 2x - 1{,}76$$

$$f(1{,}66) = 2 \cdot 1{,}66 - 1{,}76$$

$$f(1{,}66) = 1{,}56$$

APÊNDICE H

CONCESSÃO DE DIREITOS AUTORAIS E DE IMAGENS

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PÓS–GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

CONCESSÃO DE DIREITOS AUTORAIS E DE IMAGENS

Eu, _____ responsável legal pelo(a) aluno(a) _____ matriculado(a) regularmente na 1ª série do Ensino Médio Integrado de Edificações, turno vespertino, código 1.1101.1V do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia (IFRN), campus Natal-Central, cuja matrícula é nº _____, pelo presente termo autorizo a pesquisadora **Juliana Maria Schivani Alves**, do curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), cuja matrícula é 2014119282 e professora de Matemática do IFRN campus Natal-Central e da referida turma, portadora da matrícula de número 2975606, a fazer uso das imagens, fotos, gravações e vídeos do(a) estudante citado acima, bem como de suas atividades e demais registros escritos e virtuais coletados pela pesquisadora ao longo da aplicação de suas atividades de mestrado.

Tais registros serão usados em sua dissertação e também em publicações posteriores de artigos de revistas da área educacional, eventos educacionais, livros publicados, ou seja, com fins acadêmicos e científicos, a partir de tal pesquisa.

Assinatura do responsável:

_____

Data: _____/_____/_____